

Equivalence monoidale de groupes quantiques et K -théorie bivariente

par *S.Baaj et J.Crespo*

Laboratoire de Mathématiques, UMR 6620 - CNRS
Université Blaise Pascal, Campus des Cézeaux, BP **80026**
F-63171 Aubière cedex, France
baaj@math.univ-bpclermont.fr
Jonathan.Crespo@math.univ-bpclermont.fr

Résumé

Dans cet article, nous généralisons au cas localement compact et régulier, deux résultats fondamentaux [10] [26] portant sur les actions des groupes quantiques compacts. Soient G_1 et G_2 deux groupes quantiques localement compacts monoidalement équivalents [6, 7] au sens de De Commer, et réguliers. Par un procédé d'induction que nous introduisons, nous établissons une équivalence des catégories A^{G_1} et A^{G_2} formées par les actions des groupes G_1 et G_2 dans les C^* -algèbres. Comme application de ce résultat, nous déduisons l'équivalence des catégories KK^{G_1} et KK^{G_2} . La preuve s'appuie sur une version de la dualité de Takesaki-Takai pour les actions continues dans les C^* -algèbres d'un groupoïde mesuré quantique de base finie.

Mots clés : Groupes quantiques localement compacts, équivalence monoidale, K -théorie bivariente.

Abstract

In this article, we generalize to the case of regular locally compact quantum groups, two important results concerning actions of compact quantum groups (see [10] and [26]). Let G_1 and G_2 be two monoidally equivalent regular locally compact quantum groups in the sense of De Commer (see [6, 7]). We introduce an induction procedure and we build an equivalence of the categories A^{G_1} and A^{G_2} consisting of continuous actions of G_1 and G_2 on C^* -algebras. As an application of this result, we derive a canonical equivalence of the categories KK^{G_1} and KK^{G_2} . We introduce and investigate a notion of actions on C^* -algebras of measured quantum groupoids (see [12]) on a finite basis. The proof of the equivalence between KK^{G_1} and KK^{G_2} relies on a version of the Takesaki-Takai duality theorem for continuous actions on C^* -algebras of measured quantum groupoids on a finite basis.

Table des matières

0	Introduction	2
1	Rappels et notations	4
1.1	Notations préliminaires	4
1.2	Poids sur une algèbre de von Neumann [5]	5
1.3	Groupes quantiques localement compacts [16, 2]	5
1.3.1	C^* -algèbres de Hopf associées à un groupe quantique	6
1.3.2	Actions continues de groupes quantiques l.c. Produits croisés	6
1.3.3	Bimodules hilbertiens équivariants	7

2	Compléments sur les groupoides mesurés quantiques	7
2.1	Irréductibilité	7
2.2	Cas où la base est de dimension finie	11
2.3	C*-algèbres de Hopf faibles associées à un groupoïde mesuré quantique [6, 7]	13
2.4	Groupoïde mesuré associé à une équivalence monoidale	16
2.5	Régularité	20
3	Action continue d'un groupoïde quantique sur une base de dimension finie	24
3.1	Action continue. Produit croisé	24
3.2	Action duale	27
3.2.1	Cas d'une action continue du groupoïde \mathcal{G}	27
3.2.2	Cas d'une action continue du groupoïde dual $\widehat{\mathcal{G}}$	28
3.2.3	Action continue d'un groupoïde de co-liaison	28
3.3	Bidualité	34
3.3.1	Cas général	34
3.3.2	Structure du double produit croisé $A \rtimes \mathcal{G}_{G_1, G_2} \rtimes \widehat{\mathcal{G}_{G_1, G_2}}$	40
4	Induction d'actions	46
4.1	Équivalence des actions continues de G_1 et G_2	47
4.2	Induction et équivalence de Morita	54
4.3	Induction de C*-modules	55
4.4	Induction et bidualité	58
4.5	Application à la KK -théorie équivariante	63
5	Appendice	68
5.1	Produit tensoriels relatifs d'espaces de Hilbert	68
5.2	Produit fibré d'algèbres de von Neumann	69

0 Introduction

L'équivalence monoidale des groupes quantiques compacts a été développée par Bichon, De Rijdt et Vaes (*cf.* [4]). Deux groupes quantiques compacts G_1 et G_2 sont dits monoidalement équivalents si les catégories des représentations de G_1 et G_2 sont équivalentes comme C*-catégories monoidales.

Dans [4], les auteurs ont montré que G_1 et G_2 sont monoidalement équivalents ssi il existe une C*-algèbre unitale B , munie d'une action continue à gauche de G_1 et d'une action continue à droite de G_2 , qui commutent et sont ergodiques de multiplicité pleine.

Plusieurs résultats importants de la théorie géométrique des groupes quantiques discrets libres (marches aléatoires et frontières associées, propriété de Haagerup, moyennabilité faible, K -moyennabilité...), reposent sur l'équivalence monoidale de leurs duals compacts. Parmi les applications de l'équivalence monoidale à cette théorie, citons :

- Dans [22], en exploitant l'équivalence monoidale [4] de $A_o(F)$ avec un $SU_q(2)$ convenable (et les résultats de [13], [23]), Vaes et Vander Vennet ont calculé les frontières de Poisson et de Martin pour les duals des groupes orthogonaux libres $A_o(F)$.
- Dans [10], De Rijdt et Vander Vennet ont établi une correspondance bijective entre les actions continues de deux groupes quantiques compacts monoidalement équivalents. De plus, cette correspondance échange les frontières de Poisson ou de Martin des duals discrets de ces deux groupes. Il en résulte que si on connaît la frontière de Poisson ou de Martin pour un groupe quantique discret \widehat{G} , on peut déduire celles des groupes dont les duals compacts sont monoidalement équivalents à G . Ce principe a permis aux auteurs de calculer les frontières de Poisson des duals des groupes quantiques d'automorphismes.
- Dans [9], et en utilisant le principe précédent, les auteurs ont établi la propriété CCAP et celle de Haagerup pour le dual de n'importe quel $A_o(F)$. Grâce à la compatibilité de l'équivalence monoidale avec certaines opérations, ils ont étendu ces propriétés pour les groupes quantiques discrets libres.
- Dans [26], Voigt a montré que les catégories KK^{G_1} et KK^{G_2} de deux groupes quantiques compacts monoidalement équivalents, sont équivalentes. Ce résultat entraîne l'invariance par équivalence monoidale de la conjecture de Baum-Connes pour les duals. En établissant cette conjecture pour le dual d'un $SU_q(2)$ convenable, Voigt a prouvé cette conjecture pour les duals des groupes orthogonaux libres $A_0(F)$, ainsi que la K -moyennabilité de ces groupes. Ce résultat a permis à R. Vergnioux et Voigt [25] d'établir cette conjecture pour les duals des groupes unitaires libres $A_u(F)$.

Dans sa thèse [7], De Commer a étendu la notion d'équivalence monoidale au cas localement compact. Deux groupes quantiques localement compacts G_1 et G_2 (au sens de J. Kustermans et S. Vaes [16]), sont dits monoidalement équivalents s'il existe une action galoisienne à gauche γ de G_1 , et une action galoisienne à droite α de G_2 , dans la même algèbre de von Neumann N , qui commutent. Il a montré que cette notion se décrit par un groupoïde mesuré quantique (au sens [17] et [12]), de base \mathbb{C}^2 , dont G_1 et G_2 sont des "sous-groupes". Un tel groupoïde est appelé un groupoïde de co-liason.

Les groupoïdes mesurés quantiques ont été introduits et étudiés par Lesieur et Enock (*cf.* [17],[12]) Un groupoïde mesuré quantique au sens de [12], est un octuplet $\mathcal{G} = (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, T, T', \nu)$, où N et M sont des algèbres de von Neumann (N est la base et M est l'algèbre du groupoïde; elles correspondent respectivement à l'espace des unités et à l'espace total d'un groupoïde classique), α et β sont des morphismes normaux et fidèles de N et N^o (l'algèbre opposée de N) dans M dont les images commutent, Γ est le coproduit, ν est un poids normal semi-fini sur N , et T, T' sont des poids opératoriels de M dans N . Ces objets vérifient une liste d'axiomes.

Dans le cas où la base N est dimension finie, les axiomes liants les objets d'un tel octuplet \mathcal{G} , ont été simplifiés par De Commer (*cf.* [6],[7]) et nous utiliserons cette version dans la suite. Plus précisément, on peut prendre pour poids ν , la trace de Markov (non normalisée) de la C^* -algèbre $N = \bigoplus_{l=1}^k M_{n_l}$. Le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert (resp. le produit fibré d'algèbres de von Neumann) est remplacé par le produit tensoriel ordinaire d'espaces de Hilbert (resp. d'algèbres de von Neumann). Le coproduit Γ est à valeurs dans $M \otimes M$, mais n'est pas unital.

Dans cet article, nous introduisons la notion d'action continue d'un groupoïde mesuré quantique \mathcal{G} de base une C^* -algèbre N de dimension finie, dans une C^* -algèbre A . Nous étendons la construction du produit croisé et d'action duale. Dans le cas où \mathcal{G} est régulier, nous étendons la dualité de Takesaki-Takai [2] à ce cadre.

Si un groupoïde de co-liason \mathcal{G} , associé à l'équivalence monoidale de deux groupes quantiques localement compacts G_1 et G_2 , agit continument dans une C^* -algèbre A , alors A est une somme directe $A = A_1 \oplus A_2$ et par restriction de l'action de \mathcal{G} , les groupes quantiques G_1 et G_2 agissent continument dans A_1 et A_2 respectivement. Réciproquement, si G_1 et G_2 sont réguliers, nous associons canoniquement à toute action continue de G_1 dans une C^* -algèbre A_1 , une C^* -algèbre A_2 munie d'une action continue de G_2 . Comme conséquences importantes de cette construction, nous établissons :

- une correspondance fonctorielle bijective, entre les actions continues des groupes quantiques G_1 et G_2 qui généralise le cas compact [10], ainsi que le cas des déformations [18] par un 2-cocycle.

- une équivalence de Morita des produits croisés $A_1 \rtimes G_1$ et $A_2 \rtimes G_2$.
- une description complète des actions continues d'un groupoïde de co-liason.
- l'équivalence des catégories KK^{G_1} et KK^{G_2} de Kasparov, généralisant au cas localement compact et régulier, un résultat [26] de C.Voigt.

les preuves des résultats ci-dessus utilisent de façon cruciale la régularité des groupes quantiques G_1 et G_2 . Nous montrons que la régularité (au sens de [11], voir aussi [19, 20]), d'un groupoïde de co-liason \mathcal{G} , associé à l'équivalence monoidale de deux groupes quantiques localement compacts G_1 et G_2 , est équivalente à la régularité des groupes quantiques G_1 et G_2 . Ce résultat résout aussi quelques questions posées dans [18] dans le cas des déformations par un 2-cocycle.

L'organisation de ce travail est la suivante :

- Au premier paragraphe nous rappelons la notion de groupe quantique [16] localement compact (l.c), ainsi que la définition d'une action continue [3] d'un tel object, dans une C^* -algèbre.
- Au deuxième paragraphe, nous montrons que les groupoides quantiques mesurés [12] vérifient une propriété d'irréductibilité. Ce résultat étend au cas des groupoides quantiques mesurés, l'irréductibilité de la représentation régulière [2] d'un groupe quantique l.c. Nous en déduisons l'équivalence entre la régularité d'un groupoïde de co-liason associé à deux groupes quantiques monoidalement équivalents G_1 et G_2 , et celle des deux groupes.
- Au troisième paragraphe, nous introduisons la notion d'action continue d'un groupoïde quantique de base de dimension finie, dans une C^* -algèbre. Nous montrons que le produit croisé admet une action continue du groupoïde dual et nous généralisons, dans le cas régulier, la dualité [2] de Takesaki-Takai pour le double produit croisé. Nous décrivons aussi le double produit croisé par l'action d'un groupoïde de co-liason
- Au quatrième paragraphe, nous établissons l'équivalence des actions continues de deux groupes quantiques l.c G_1 et G_2 monoidalement équivalents et réguliers.
- Au cinquième paragraphe, nous construisons une équivalence des catégories KK^{G_1} et KK^{G_2} associées à deux groupes quantiques G_1 et G_2 monoidalement équivalents et réguliers.
- Dans l'appendice, nous avons regroupé quelques résultats utilisés dans l'article.

Le premier auteur remercie G.Skandalis pour d'utiles discussions sur divers points de cet article.

1 Rappels et notations

1.1 Notations préliminaires

Nous introduisons quelques notations et conventions utilisées dans l'article.

- Pour tout sous-ensemble X d'un espace de Banach E , on note $[X]$ le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par X .
- Tous les produits tensoriels de C^* -algèbres sont supposés munis de la norme spatiale (produits tensoriels $\ll \min \gg$).
- Si A est un C^* -algèbre, on note $M(A)$ la C^* -algèbre des multiplicateurs de A .
- Soient H, K deux espaces de Hilbert, on note $\Sigma_{H \otimes K}$, ou plus simplement Σ l'opérateur unitaire $H \otimes K \rightarrow K \otimes H : \xi \otimes \eta \mapsto \eta \otimes \xi$.
- Dans cet article, nous utiliserons la notion de C^* -module hilbertien sur une C^* -algèbre, ainsi que leurs produits tensoriels (interne et externe). Les définitions et conventions utilisées sont celles de [14]. En particulier, soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux C^* -modules hilbertiens sur une C^* -algèbre A .
- On note $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'espace de Banach formé par les opérateurs $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ qui ont un adjoint et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ la C^* -algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

• Si $\xi \in \mathcal{F}$ et $\eta \in \mathcal{E}$, on note $\theta_{\xi,\eta}$ l'opérateur $\zeta \mapsto \xi \langle \eta, \zeta \rangle_A$ et on pose $\mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = [\{\theta_{\xi,\eta} \mid \xi \in \mathcal{F}, \eta \in \mathcal{E}\}]$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E}) = \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ la sous-C*-algèbre des opérateurs compacts engendrée par les opérateurs $\theta_{\xi,\eta}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. On rappelle [14] qu'on a $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = M(\mathcal{K}(\mathcal{E}))$.

1.2 Poids sur une algèbre de von Neumann [5]

Soit φ un poids normal semi-fini et fidèle (nsff) sur une algèbre de Von Neumann M . On note $\mathfrak{N}_\varphi, H_\varphi, \Lambda_\varphi, J_\varphi, \Delta_\varphi, \sigma_t^\varphi$ les objets canoniques de la théorie de Tomita-Takesaki, associés au poids φ . Rappelons simplement qu'on a :

- $\mathfrak{N}_\varphi := \{x \in M \mid \varphi(x^*x) < \infty\}$ et l'espace de Hilbert H_φ est le complété de \mathfrak{N}_φ pour le produit scalaire $\langle x, y \rangle := \varphi(x^*y)$.
 - $\Lambda_\varphi : \mathfrak{N}_\varphi \rightarrow H_\varphi$ est l'injection de \mathfrak{N}_φ dans son complété.
 - $\pi_\varphi : M \rightarrow \mathcal{L}(H_\varphi)$ est la représentation définie par $\pi_\varphi(a)\Lambda_\varphi x := \Lambda_\varphi(ax)$.
- $(H_\varphi, \Lambda_\varphi, \pi_\varphi)$ est par définition la représentation GNS du poids φ .

1.3 Groupes quantiques localement compacts [16, 2]

1.1 Definition. [16] Un groupe quantique localement compact (l.c) est un couple $G = (M, \delta)$ avec

- a) M est une algèbre de von Neumann et $\delta : M \rightarrow M \otimes M$ est un *-morphisme unital, injectif, normal et coassociatif, i.e $(\delta \otimes \text{id}_M)\delta = (\text{id}_M \otimes \delta)\delta$.
- b) il existe des poids nsff φ et ψ sur M vérifiant :
 - φ est invariant à gauche, i.e $\varphi((\omega \otimes \text{id}_M)\delta(x)) = \omega(1)\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi^+$ et tout $\omega \in M_*^+$.
 - ψ est invariant à droite, i.e $\psi((\text{id}_M \otimes \omega)\delta(x)) = \omega(1)\psi(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\psi^+$ et tout $\omega \in M_*^+$.

Pour un groupe quantique l.c (M, δ) , un poids nsff sur M invariant à gauche, (resp. invariant à droite), est unique [16] à une constante strictement positive près.

Soit $G = (M, \delta)$ un groupe quantique l.c. Fixons un poids nsff sur M invariant à gauche (une mesure de Haar à gauche) φ . La représentation GNS de φ est notée $(L^2(G), \Lambda, \pi)$. La représentation régulière gauche du groupe quantique G est l'unitaire multiplicatif [2] $W \in B(L^2(G) \otimes L^2(G))$ défini par

$$W^*(\Lambda x \otimes \Lambda y) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\delta(y)(x \otimes 1)) \quad , \quad x, y \in \mathfrak{N}_\varphi$$

En identifiant $L^\infty(G) := M$ à son image par π , on obtient :

- M est l'adhérence forte de l'algèbre $\{(\text{id}_M \otimes \omega)(W) \mid \omega \in B(L^2(G))_*\}$.
- $\delta(x) = W^*(1 \otimes x)W$ pour tout $x \in M$.

L'algèbre de Hopf-von Neumann (M, δ) admet [16] une antipode unitaire $R_M : M \rightarrow M$ et on peut prendre $\psi := \varphi \circ R_M$ pour mesure de Haar à droite. Le cocycle de Connes [5, 21] de ψ relativement à φ est de la forme :

$$[D\psi : D\varphi]_t = \nu^{i\frac{t^2}{2}} d^{it} \quad , \quad \nu > 0 \quad , \quad d\eta M$$

Posons $\mathfrak{N}_\varphi^d = \{x \in M \mid xd^{\frac{1}{2}} \text{ borné et } \overline{xd^{\frac{1}{2}}} \in \mathfrak{N}_\varphi\}$. La représentation GNS [21] de ψ est donnée par $(L^2(G), \text{id}, \Lambda_\psi)$, où Λ_ψ est la fermeture pour les topologies ultraforte/normique de l'application $\mathfrak{N}_\varphi^d \rightarrow H : x \mapsto \Lambda xd^{\frac{1}{2}}$. Avec ce choix de représentation GNS pour ψ , on a $J_\psi = \nu^{\frac{i}{4}} J$.

La représentation régulière droite de G est l'unitaire multiplicatif $V \in B(L^2(G) \otimes L^2(G))$ défini par

$$V(\Lambda_\psi x \otimes \Lambda_\psi y) = (\Lambda_\psi \otimes \Lambda_\psi)(\delta(x)(1 \otimes y)) \quad , \quad x, y \in \mathfrak{N}_\psi$$

Le groupe quantique \widehat{G} dual de G est défini par l'algèbre de Hopf-von Neumann $(L^\infty(\widehat{G}), \widehat{\delta})$ où $(L^\infty(\widehat{G}))$ est la fermeture forte de l'algèbre $\{(\text{id} \otimes \omega)(V) \mid \omega \in B(L^2(G))_*\}$ et $\widehat{\delta} : L^\infty(\widehat{G}) \rightarrow L^\infty(\widehat{G}) \otimes L^\infty(\widehat{G}) : x \mapsto$

$V^*(1 \otimes x)V$.

Le groupe quantique \widehat{G} admet des mesures de Haar [16], dont on peut prendre $L^2(G)$ pour espace de Hilbert des représentations GNS, on note dans la suite \widehat{J} l'opérateur de Tomita de la mesure de Haar à gauche de \widehat{G} .

1.3.1 C*-algèbres de Hopf associées à un groupe quantique

Au groupe quantique G , on associe [2, 16] deux C*-algèbres de Hopf (S, δ) et $(\widehat{S}, \widehat{\delta})$ définies par :

- S (resp. \widehat{S}), est la fermeture normique de l'algèbre :

$$\{(\omega \otimes \text{id})(V) \mid \omega \in B(L^2(G))_*\} \quad , \quad (\text{resp. } \{(\text{id} \otimes \omega)(V) \mid \omega \in B(L^2(G))_*\})$$

- $\delta : S \rightarrow M(S \otimes S) : x \mapsto V(x \otimes 1)V^*$, $\widehat{\delta} : \widehat{S} \rightarrow M(\widehat{S} \otimes \widehat{S}) : x \mapsto V^*(1 \otimes x)V$.

Posons $U := \widehat{J}J = \nu^{\frac{i}{4}}J\widehat{J}$. Les C*-algèbres S et \widehat{S} admettent les représentations :

- $L : S \rightarrow B(L^2(G)) : x \mapsto L(x) = x$, $R : S \rightarrow B(L^2(G)) : x \mapsto UL(x)U^*$.

- $\rho : \widehat{S} \rightarrow B(L^2(G)) : x \mapsto \rho(x) = x$, $\lambda : \widehat{S} \rightarrow B(L^2(G)) : x \mapsto U\rho(x)U^*$.

On déduit de ([16], Proposition 2.15) qu'on a

$$W = \Sigma(U \otimes 1)V(U^* \otimes 1)\Sigma \quad , \quad [W_{12}, V_{23}] = 0$$

La représentation régulière droite de \widehat{G} est l'unitaire multiplicatif $\widetilde{V} = \Sigma(1 \otimes U)V(1 \otimes U^*)\Sigma$

1.2 Notations. a) $\mathcal{K} \subset B(L^2(G))$ désigne la C*-algèbre des opérateurs compacts.

b) $C(V)$ (resp. $C(W)$) est la fermeture normique de l'algèbre [2] $\{(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma V) \mid \omega \in B(L^2(G))_*\}$ (resp. $\{(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma W) \mid \omega \in B(L^2(G))_*\}$)

1.3 Definition. [2, 3] Le groupe quantique G est dit régulier (resp. semi-régulier) ssi $\mathcal{K} = C(V)$ (resp. $\mathcal{K} \subset C(V)$)

G est régulier (resp. semi-régulier) ssi $\mathcal{K} = C(W)$ (resp. $\mathcal{K} \subset C(W)$) (cf. [3])

1.3.2 Actions continues de groupes quantiques l.c. Produits croisés

Conservons les notations précédentes. Soit A une C*-algèbre. Une coaction de (S, δ) dans A est un *-morphisme $\delta_A : A \rightarrow M(A \otimes S)$ non dégénéré vérifiant $(\delta_A \otimes \text{id})\delta_A = (\text{id} \otimes \delta)\delta_A$.

1.4 Definition. Une action fortement (resp. faiblement) continue de G dans A est une coaction δ_A de (S, δ) dans A vérifiant $[\delta_A(A)(1_A \otimes S)] = A \otimes S$, (resp. $A = [(\text{id}_A \otimes \omega)\delta_A(A) \mid \omega \in B(L^2(G))_*]$).

Une G -algèbre est un couple (A, δ_A) où A est une C*-algèbre et $\delta_A : A \rightarrow M(A \otimes S)$ est une action fortement continue de G dans A .

Si G est régulier, toute action de G faiblement continue est fortement continue (cf. [3]). Dans ce cas, nous dirons que δ_A est une action continue de G dans A .

1.5 Definition. Soit $\delta_A : A \rightarrow M(A \otimes S)$ (resp. $\delta_A : A \rightarrow M(A \otimes \widehat{S})$) une action fortement continue de G (resp. \widehat{G}) dans une C*-algèbre A . Notons π_L (resp. $\widehat{\pi}_\lambda$) la représentation de A dans le C*-module $A \otimes L^2(G)$ définie par $\pi_L := (\text{id}_A \otimes L)\delta_A$ (resp. $\widehat{\pi}_\lambda := (\text{id}_A \otimes \lambda)\delta_A$).

On appelle produit croisé (réduit) de A par G (resp. \widehat{G}), la sous-C*-algèbre notée $A \rtimes G$ (resp. $A \rtimes \widehat{G}$) de $\mathcal{L}(A \otimes L^2(G))$ engendrée par les produits $\pi_L(a)(1_A \otimes \rho(x))$, $a \in A$ et $x \in \widehat{S}$ (resp. $\widehat{\pi}_\lambda(a)(1_A \otimes L(x))$, $a \in A$ et $x \in S$).

Le produit croisé $A \rtimes G$ (resp. $A \rtimes \widehat{G}$), admet une action fortement continue de \widehat{G} (resp. G). Dans le cas où G est régulier, la dualité de Takesaki-Takai s'étend à ce cadre, cf. [2].

1.6 Notation. On note A^G la catégorie dont les objets sont les G -algèbres, et les morphismes sont les $*$ -morphisms $f : A \rightarrow M(B)$ non dégénérés et G -équivariants, i.e $(f \otimes \text{id})\delta_A = \delta_B \circ f$.

1.3.3 Bimodules hilbertiens équivariants

Dans ce qui suit, nous rappelons brièvement la bidualité pour les produits croisés de bimodules hilbertiens équivariants, cf. [1, 2].

G étant un groupe quantique l.c régulier, soient (A, δ_A) et (B, δ_B) deux G -algèbres et $(\mathcal{E}, \delta_{\mathcal{E}})$ un $A - B$ bimodule hilbertien G -équivariant, i.e \mathcal{E} est un $A - B$ bimodule hilbertien et la C^* -algèbre de $\mathcal{K}(\mathcal{E} \oplus B)$ est munie d'une action continue :

$$\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E} \oplus B)} : \mathcal{K}(\mathcal{E} \oplus B) \rightarrow M(\mathcal{K}(\mathcal{E} \oplus B) \otimes S)$$

compatible avec les coactions δ_A et δ_B au sens suivant :

- le $*$ -morphisme évident $B \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{E} \oplus B)$ est supposé G -équivariant.
- L'action à gauche $A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est supposée G -équivariante.

On note $\delta_{\mathcal{E}}$ la restriction de $\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E} \oplus B)}$ à \mathcal{E} , (cf. [1]).

On déduit alors de ([2], paragraphe 7) :

- 1) le $A \rtimes G \rtimes \widehat{G} - B \rtimes G \rtimes \widehat{G}$ bimodule hilbertien G -équivariant $\mathcal{E} \rtimes G \rtimes \widehat{G}$ s'identifie au $A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) - B \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ bimodule hilbertien G -équivariant $\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$.
- 2) Les G -algèbres $A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ et $B \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ sont munies de l'action biduale de G . L'action de G dans le $B \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ -module hilbertien $\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ est donnée par la coaction $\delta_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}(L^2(G))}$ définie par :

$$\delta_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}(L^2(G))}(\xi) = V_{23}(\text{id} \otimes \sigma)(\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(L^2(G))})(\xi)V_{23}^* \quad , \quad \xi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$$

où $\sigma : S \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \rightarrow \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes S : x \otimes y \mapsto y \otimes x$ et $V \in M(\mathcal{K}(L^2(G)) \otimes S)$ est la représentation régulière droite du groupe quantique G .

2 Compléments sur les groupoides mesurés quantiques

Dans ce paragraphe, nous établissons un résultat d'irréductibilité valable pour les groupoides mesurés quantiques. Dans le cas où la base du groupoïde est de dimension finie, ce résultat joue un rôle crucial pour établir la dualité de Takesaki-Takai. Dans le cas d'un groupoïde de co-liason [6, 7] il permet de relier la régularité de ce groupoïde à celle des deux groupes quantiques l.c monoidalement équivalents sous-jacents à ce groupoïde.

Nous commençons par rappeler les définitions et résultats portant sur les groupoides mesurés quantiques dont on a besoin. On se réfère principalement à [12]. Les notions de produits tensoriels relatifs d'espaces de Hilbert et de produits fibrés d'algèbre de von Neumann sont rappelés dans l'appendice .

2.1 Irréductibilité

Un groupoïde mesuré quantique (m.q) de base N , est un octouplut $\mathcal{G} = (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, T, T', \nu)$, où :

- M et N sont des algèbres de von Neumann, $\alpha : N \rightarrow M$ et $\beta : N^o \rightarrow M$ sont des morphismes normaux

et fidèles. N° désigne l'algèbre de von Neumann opposée.

- Le coproduit $\Gamma : M \rightarrow M_\beta *_\alpha M$ est un morphisme normal et fidèle. ($M_\beta *_\alpha M$ est un produit fibré d'algèbres de von Neumann)

- $T : M^+ \rightarrow \alpha(M)^{+, \text{ext}}$ et $T' : M^+ \rightarrow \beta(M)^{+, \text{ext}}$ sont des poids opératoriels normaux et fidèles.

- ν est un poids nsff sur N .

Ces objets sont assujettis aux conditions suivantes ;

1. Les images des morphismes α et β commutent.
2. Γ est coassociatif, i.e $(\Gamma_\beta *_\alpha \text{id}_M)\Gamma = (\text{id}_\beta *_\alpha \Gamma)\Gamma$.
3. Pour tout $n \in N$, on a $\Gamma(\alpha(n)) = \alpha(n)_\beta *_\alpha 1$ et $\Gamma(\beta(n^\circ)) = 1_\beta *_\alpha \beta(n^\circ)$.
4. Les poids nsff φ et ψ sur M définis respectivement par $\varphi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T$ et $\psi = \nu \circ \beta^{-1} \circ T'$ vérifient :

$$T = (\text{id}_\beta *_\alpha \varphi)\Gamma \quad \text{et} \quad T' = (\psi_\beta *_\alpha \text{id})\Gamma$$

5. Les groupes modulaires des poids φ et ψ commutent.

Soit (H, π, Λ) la représentation GNS du poids φ , notons (σ_t) , Δ et J respectivement le groupe modulaire, l'opérateur modulaire et l'opérateur de Tomita associés au poids φ . Dans ce qui suit, on identifie M et son image par π dans $B(H)$.

D'après [12], on a :

- $R_\mathcal{G} : M \rightarrow M$ un *-antiautomorphisme vérifiant $R^2 = \text{id}_M$ et coinvolutif.

- On peut supposer que $T' = R_\mathcal{G} T R_\mathcal{G}$, et donc aussi $\psi = \varphi \circ R_\mathcal{G}$.

- Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $(D\Psi : D\varphi)_t = \lambda^{i\frac{t^2}{2}} d^{it}$, où λ, d sont des opérateurs autoadjoints positifs affiliés à M , l'opérateur λ étant central.

- La représentation GNS du poids ψ est donnée par $(H, \text{id}, \Lambda_\psi)$, où Λ_ψ est la fermeture pour les topologies ultraforte/normique de l'opérateur non borné :

$$\{x \in M / x d^{\frac{1}{2}} \text{ borné et } \overline{x d^{\frac{1}{2}}} \in \mathfrak{N}_\varphi\} \rightarrow H : x \mapsto \overline{\Lambda x d^{\frac{1}{2}}}$$

- L'opérateur de Tomita J_ψ associé au poids ψ est donné par $J_\psi = \lambda^{\frac{1}{4}} J$.

- Le groupoïde mesuré dual $\widehat{\mathcal{G}} = (N, \widehat{M}, \alpha, \widehat{\beta}, \widehat{\Gamma}, \widehat{T}, \widehat{T}', \nu)$ est définie de la façon suivante :

- \widehat{M} est l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $(\omega * \text{id})\mathcal{W}$, où $\omega \in B(H)_*$. (\mathcal{W} est l'unitaire pseudo-multiplicatif [24] associé au groupoïde \mathcal{G} .)
- Pour tout $x \in N$, posons $\widehat{\beta}(x^\circ) = J\alpha(x)^* J$. On a $\widehat{\beta} : N^\circ \rightarrow \widehat{M}$.
- $\widehat{\Gamma} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{M} * \widehat{M} : x \mapsto \widehat{\Gamma}(x) = \sigma_{\nu^\circ} \mathcal{W}(x_\beta \otimes_\alpha 1) \mathcal{W}^* \sigma_\nu$.
- On a un unique poids nsff $\widehat{\varphi}$ sur \widehat{M} , avec comme représentation GNS $(H, \text{id}, \Lambda_{\widehat{\varphi}})$, où $\Lambda_{\widehat{\varphi}}$ est la fermeture de l'opérateur $(\omega * \text{id})\mathcal{W} \mapsto a_\varphi(\omega)$, où ω appartient à un sous-espace dense de :

$$I_\varphi := \{\omega \in B(H)_* / \exists k \geq 0 \text{ t.q } \forall x \in \mathfrak{N}_\varphi \mid |\omega(x^*)|^2 \leq k\varphi(x^*x)\}$$

le vecteur $a_\varphi(\omega) \in H$ étant défini par :

$$\forall x \in \mathfrak{N}_\varphi \quad \omega(x^*) = \langle \Lambda x, a_\varphi(\omega) \rangle$$

\widehat{T} est alors l'unique poids opératoriel nsff de \widehat{M} sur $\alpha(N)$ vérifiant $\widehat{\varphi} = \nu \circ \alpha^{-1} \circ \widehat{T}$.

$\widehat{T}' = R_{\widehat{\mathcal{G}}} \widehat{T} R_{\widehat{\mathcal{G}}}$, où $R_{\widehat{\mathcal{G}}} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ est la coinvolution unitaire définie par $R_{\widehat{\mathcal{G}}}(x) = Jx^* J$.

L'opérateur de Tomita du poids $\widehat{\varphi}$ est noté \widehat{J} .

Dans la suite, nous utiliserons pour dual du groupoïde \mathcal{G} , le groupoïde $\widehat{\mathcal{G}}^c = (N^\circ, \widehat{M}', \beta, \widehat{\alpha}, \widehat{\Gamma}^c, \widehat{T}^c, \widehat{T}^{c'}, \nu^\circ)$ car il est mieux adapté pour les actions à droite du groupoïde \mathcal{G} . Notons qu'on a :

- $\widehat{\Gamma}^c(x) = (\mathcal{W}_{(\widehat{\mathcal{G}})^c})^*(1_\beta \otimes_\alpha x) \mathcal{W}_{(\widehat{\mathcal{G}})^c}$ pour tout $x \in \widehat{M}'$.
- $\widehat{T}^c = C_{\widehat{M}} \circ \widehat{T} \circ C_{\widehat{M}}^{-1}$, où $C_{\widehat{M}} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}' : x \mapsto \widehat{J}x^* \widehat{J}$.
- $\widehat{T}^{c'} = R_{\widehat{\mathcal{G}}^c} \circ \widehat{T}^c \circ R_{\widehat{\mathcal{G}}^c}$.
- le poids commutant $\widehat{\varphi}' = \nu^\circ \circ \beta^{-1} \circ \widehat{T}^c$ déduit du poids $\widehat{\varphi}$, est invariant à gauche pour le coproduit $\widehat{\Gamma}^c$.

2.1 Notations. Notons $\mathcal{W}_{\mathcal{G}}$ l'unitaire pseudo-multiplicatif associé [12] à un groupoïde m.q. \mathcal{G} . Posons avec les notations de [12] :

$$\widehat{\mathcal{V}} := \mathcal{W}_{\mathcal{G}} \quad , \quad \mathcal{V} := \mathcal{W}_{\widehat{\mathcal{G}}^{\text{op}}} = \mathcal{W}_{(\widehat{\mathcal{G}})^c} \quad , \quad \widetilde{\mathcal{V}} := \mathcal{W}_{(\mathcal{G}^{\text{op}})^c} \quad , \quad U := \widehat{J}J$$

2.2 Lemme. Nous avons :

a) $U^* = \lambda^{-\frac{1}{4}}U$.

b) $\widehat{\mathcal{V}} = \sigma_{\widehat{\beta}\alpha}(U_{\beta} \otimes_{\alpha} 1)\mathcal{V}(U_{\alpha}^* \otimes_{\beta} 1)\sigma_{\beta\alpha}$

c) $\widetilde{\mathcal{V}} = \sigma_{\beta\widehat{\alpha}}(1_{\beta} \otimes_{\widehat{\alpha}} U)\mathcal{V}(1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U^*)\sigma_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}}$

où $\sigma_{\beta\alpha} : H_{\beta} \otimes_{\alpha} H \rightarrow H_{\alpha} \otimes_{\beta} H$, ainsi que $\sigma_{\widehat{\beta}\alpha}$, $\sigma_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}}$ et $\sigma_{\beta\widehat{\alpha}}$ désignent les voltes, $\widehat{\alpha} := \text{Ad}U \circ \alpha$ et $\widehat{\beta} := \text{Ad}U \circ \beta$.

Démonstration. Le a) résulte de [12] **3.11 (iv)**. rappelons que λ est central dans M et \widehat{M} .

Le b) (resp. le c)) résulte de [12] **3.12 (v)** (resp. **3.12 (vi)**). □

2.3 Lemme. Soient $\mathcal{G} = (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, T, T', \nu)$ un groupoïde m.q et $\widehat{\mathcal{G}} = (N, M, \alpha, \widehat{\beta}, \widehat{\Gamma}, \widehat{T}, \widehat{R} \circ \widehat{T} \circ \widehat{R}, \nu)$ le groupoïde dual [12] de \mathcal{G} . Alors nous avons :

a) Pour tout tout $x \in M'$, on a :

$$\widehat{\mathcal{V}}(x_{\beta} \otimes_{\alpha} 1) = (x_{\alpha} \otimes_{\widehat{\beta}} 1)\widehat{\mathcal{V}} \quad , \quad \mathcal{V}(1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} x) = (1_{\beta} \otimes_{\alpha} x)\mathcal{V}$$

b) Pour tout $x \in \widehat{M}$, on a :

$$\mathcal{V}(x_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} 1) = (x_{\beta} \otimes_{\alpha} 1)\mathcal{V} \quad , \quad \widetilde{\mathcal{V}}(1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} x) = (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} x)\widetilde{\mathcal{V}}$$

c) Pour tout tout $x \in M$, on a :

$$\mathcal{V}(x_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} 1)\mathcal{V}^* = \widehat{\mathcal{V}}^*(1_{\alpha} \otimes_{\widehat{\beta}} x)\widehat{\mathcal{V}} \quad , \quad \widetilde{\mathcal{V}}(x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1) = (x_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} 1)\widetilde{\mathcal{V}}$$

d) Pour tout tout $x \in \widehat{M}'$, on a :

$$\mathcal{V}^*(1_{\beta} \otimes_{\alpha} x)\mathcal{V} = \widetilde{\mathcal{V}}(x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1)\widetilde{\mathcal{V}}^* \quad , \quad \widehat{\mathcal{V}}(1_{\beta} \otimes_{\alpha} x) = (1_{\alpha} \otimes_{\widehat{\beta}} x)\widehat{\mathcal{V}}$$

Démonstration. Les opérateurs apparaissant dans l'énoncé ont un sens grace aux relations [12] :

$$M \cap \widehat{M} = \alpha(N) \quad , \quad M \cap \widehat{M}' = \beta(N) \quad , \quad M' \cap \widehat{M} = \widehat{\beta}(N) \quad , \quad M' \cap \widehat{M}' = \widehat{\alpha}(N) \quad (2.1)$$

la preuve repose uniquement sur les résultats **3.8**, **3.11** et **3.12** de [12]. Par exemple, la première relation du a) résulte du fait que M est l'adhérence faible de l'algèbre $\{(\text{id} * \omega)(\widehat{\mathcal{V}}) / \omega \in B(H)_*\}$, cf. **3.8**. La deuxième relation résulte alors de la première et de la formule $\widehat{\mathcal{V}} = \sigma_{\widehat{\beta},\alpha}(U_{\beta} \otimes_{\alpha} 1)\mathcal{V}(U_{\alpha}^* \otimes_{\beta} 1)\sigma_{\beta,\alpha}$ la première relation du c) (resp. du d)), est exactement la première (resp. dernière) relation de **3.12 (v)** (resp. **3.12 (vi)**). □

2.4 Corollaire. Nous avons :

- 1) $\mathcal{V}^*(UxU_{\beta}^* \otimes_{\alpha} 1)\mathcal{V} = (U_{\alpha} \otimes_{\beta} 1)\sigma_{\beta\alpha}\mathcal{V}(x_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} 1)\mathcal{V}^*\sigma_{\alpha\beta}(U_{\widehat{\alpha}}^* \otimes_{\beta} 1) \quad , \quad x \in M$
- 2) $\mathcal{V}(1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} UyU^*)\mathcal{V}^* = (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U)\sigma_{\widehat{\alpha}\beta}\mathcal{V}^*(1_{\beta} \otimes_{\alpha} y)\mathcal{V}\sigma_{\beta\widehat{\alpha}}(1_{\beta} \otimes_{\widehat{\alpha}} U^*) \quad , \quad y \in \widehat{M}'$
- 3) $\widetilde{\mathcal{V}}(1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} UyU^*)\widetilde{\mathcal{V}}^* = (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U)\sigma_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}}\widetilde{\mathcal{V}}^*(1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} y)\widetilde{\mathcal{V}}\sigma_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\widehat{\beta}} U^*) \quad , \quad y \in M'$
- 4) $\widehat{\mathcal{V}}_{12}\mathcal{V}_{23} = \mathcal{V}_{23}\widehat{\mathcal{V}}_{12} \quad , \quad (\text{resp.} \quad \mathcal{V}_{12}\widetilde{\mathcal{V}}_{23} = \widetilde{\mathcal{V}}_{23}\mathcal{V}_{12})$

Démonstration. Le 1) (resp. le 2)), est une conséquence de la première relation du c) (resp. du d).

Le 3) s'obtient à partir du 2) en remplaçant le groupoïde \mathcal{G} par le groupoïde $(\widehat{\mathcal{G}})^c$.

La première (resp. la deuxième) égalité du 4) est équivalente à la première relation du b) (resp. deuxième du c). \square

Nous avons :

2.5 Proposition. $(1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \in \widehat{\beta}(N)_{\widehat{\beta}} *_{\widehat{\alpha}} \widehat{\alpha}(N)$

Démonstration. Posons $T = (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}}$ et remarquons que $T \in B(H_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} H)$ est un unitaire . Utilisant la définition [12] du produit fibré $\widehat{\beta}(N)_{\widehat{\beta}} *_{\widehat{\alpha}} \widehat{\alpha}(N)$, il revient au même de montrer que pour tout $x \in \widehat{\beta}(N)'$ et tout $y \in \widehat{\alpha}(N)'$, on a $[T, x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y] = 0$.

Montrons qu'on a $[T, x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1] = 0$ pour tout $x \in \widehat{\beta}(N)'$.

- Si $x \in M$, on a

$$T(x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1) = (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} (x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\beta} 1) \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.3 c)$$

$$\begin{aligned} &= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} (x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\beta} 1) \mathcal{V}^* \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \\ &= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \widehat{\mathcal{V}}^* (1_{\alpha} \otimes_{\beta} x) \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \\ &= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} (1_{\alpha} \otimes_{\beta} x) \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} = (x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1) T \end{aligned} \quad (2.3 c)$$

- Si $x \in \widehat{M}'$, on a

$$\begin{aligned} T(x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1) &= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} (x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1) \widetilde{\mathcal{V}}^* \widetilde{\mathcal{V}} \\ &= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \mathcal{V}^* (1_{\beta} \otimes_{\alpha} x) \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \\ &= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} (1_{\alpha} \otimes_{\beta} x) \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} = (x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1) T \end{aligned} \quad (2.3 d)$$

On a donc montré que pour tout $x \in \widehat{\beta}(N)'$, on a $[T, x_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} 1] = 0$. De façon similaire, montrons que pour tout $y \in \widehat{\alpha}(N)'$, on a $[T, 1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y] = 0$.

- Si $y \in \widehat{M}$, on a

$$T(1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) = (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} y) \widetilde{\mathcal{V}} = (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} y) \mathcal{V}^* \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.3 b))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U) \sigma_{\widehat{\alpha}\beta} \mathcal{V}^* (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U y U^*) \mathcal{V} \sigma_{\beta\widehat{\alpha}} (1_{\beta} \otimes_{\widehat{\alpha}} U^*) \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.4 2))$$

$$= (U_{\beta} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U^* y U) \mathcal{V} \sigma_{\beta\widehat{\alpha}} (1_{\beta} \otimes_{\widehat{\alpha}} U^*) \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.2 b))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) (U_{\beta} \otimes_{\alpha} 1) \mathcal{V} \sigma_{\beta\widehat{\alpha}} (1_{\beta} \otimes_{\widehat{\alpha}} U^*) \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.2 b))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \sigma_{\widehat{\alpha}\beta} (U_{\beta} \otimes_{\alpha} 1) \mathcal{V} \sigma_{\beta\widehat{\alpha}} (1_{\beta} \otimes_{\widehat{\alpha}} U^*) \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} = (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) T \quad (2.2 b))$$

- Si $y \in M$, on a

$$T(1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) = (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U) \sigma_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}} \widetilde{\mathcal{V}}^* (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U y U^*) \widetilde{\mathcal{V}} \sigma_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U^*) \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.4 3))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U) \sigma_{\widehat{\alpha}\beta} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U y U^*) \widetilde{\mathcal{V}} \sigma_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U^*) \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.2 c))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} (U y U_{\beta}^* \otimes_{\alpha} U) \sigma_{\widehat{\alpha}\beta} \widetilde{\mathcal{V}} \sigma_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U^*) \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.3 a))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U^* y U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U) \sigma_{\widehat{\alpha}\beta} \widetilde{\mathcal{V}} \sigma_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U^*) \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.3 a))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} (1_{\beta} \otimes_{\alpha} U) \sigma_{\widehat{\alpha}\beta} \widetilde{\mathcal{V}} \sigma_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} (1_{\widehat{\alpha}} \otimes_{\beta} U^*) \widetilde{\mathcal{V}} = (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} U) \sigma_{\alpha\widehat{\beta}} \widehat{\mathcal{V}} \mathcal{V} \widetilde{\mathcal{V}} \quad (2.2 c))$$

$$= (1_{\widehat{\beta}} \otimes_{\widehat{\alpha}} y) T$$

\square

2.2 Cas où la base est de dimension finie

Si la base d'un groupoïde m.q est de dimension finie, De Commer [6, 7] a donné une définition équivalente plus simple d'un tel groupoïde. En se basant sur cette définition que nous rappelons, nous améliorons le résultat d'irréductibilité 2.5 et nous généralisons aussi à ce cadre, quelques résultats utiles du cas des groupes quantiques localement compacts.

Fixons dans ce qui suit, $N = \bigoplus_{l=1}^k M_{n_l}$ une C^* -algèbre de dimension finie, munie de la trace de Markov non normalisée $\varepsilon = \bigoplus_{l=1}^k n_l \text{Trace}_{M_{n_l}}$.

Le résultat suivant sera utilisé plusieurs fois :

2.6 Lemme. *Soient A et B deux C^* -algèbres et soient $\alpha : N \rightarrow M(A)$ et $\beta : N^o \rightarrow M(B)$ deux $*$ -morphisms non dégénérés. Alors il existe un unique projecteur $p \in M(B \otimes A)$ tel que pour tout s.u.m $(e_{ij}^{(l)})_{i,j=1,\dots,n_l, l=1,\dots,k}$ de N , on ait :*

$$p = \sum_{l=1}^k \frac{1}{n_l} \sum_{i,j=1}^{n_l} \beta(e_{ji}^{(l)o}) \otimes \alpha(e_{ij}^{(l)})$$

Ce projecteur p sera dans toute la suite, noté $q_{\beta,\alpha}$.

Démonstration. On peut supposer que B (resp. A), est une C^* -algèbre non dégénérée de $B(K)$, (resp. $B(H)$), avec K, H des espaces de Hilbert.

Notons \mathcal{E} le C^* -module sur N canoniquement associé (5.8) au morphisme $\beta : N^o \rightarrow B(K)$. Soit v la co-isométrie définie par :

$$v : K \otimes H \rightarrow \mathcal{E} \otimes_\alpha H : \xi \otimes \eta \mapsto \xi \otimes_\alpha \eta$$

On vérifie que $p = v^*v$ convient (cf. [6]). □

La définition équivalente d'un groupoïde mesuré quantique de base N , donnée par De Commer [6, 7], est alors la suivante :

2.7 Définition. Un groupoïde mesuré quantique (m.q) de base N , est un octouplet $\mathcal{G} = (N, M, \alpha, \beta, \delta, T, T', \epsilon)$, où :

- M est une algèbre de von Neumann, $\alpha : N \rightarrow M$ et $\beta : N^o \rightarrow M$ sont des morphismes normaux et fidèles.

- Le coproduit $\delta : M \rightarrow M \otimes M$ est un morphisme normal et fidèle.

- $T : M^+ \rightarrow \alpha(M)^{+, \text{ext}}$ et $T' : M^+ \rightarrow \beta(M)^{+, \text{ext}}$ sont des poids opératoriels normaux, semi-finis et fidèles.

Ces objets sont assujettis aux conditions suivantes ;

1. Les images des morphismes α et β commutent.

2. $\delta(1) = q_{\beta,\alpha}$ et δ est coassociatif, i.e $(\delta \otimes \text{id}_M)\delta = (\text{id}_M \otimes \delta)\delta$.

3. Pour tout $n \in N$, on a $\delta(\alpha(n)) = \delta(1)(\alpha(n) \otimes 1)$ et $\delta(\beta(n^o)) = \delta(1)(1 \otimes \beta(n^o))$.

4. Les poids nsff φ et ψ sur M définis respectivement par $\varphi = \epsilon \circ \alpha^{-1} \circ T$ et $\psi = \epsilon \circ \beta^{-1} \circ T'$ vérifient :

$$T = (\text{id}_M \otimes \varphi)\delta \quad \text{et} \quad T' = (\psi \otimes \text{id}_M)\delta$$

5. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^T \circ \alpha = \alpha$ et $\sigma_t^{T'} \circ \beta = \beta$.

2.8 Notations.

a) V désigne l'image par l'injection canonique $\iota_{\alpha\beta}^\beta : B(H_{\hat{\alpha}} \otimes_\beta H, H_\beta \otimes_\alpha H) \rightarrow B(H \otimes H)$ de l'unitaire-pseudo-multiplicatif [12] $\mathcal{V} := \widehat{\mathcal{W}_{\mathcal{G}^{\text{op}}}} = \widehat{\mathcal{W}_{(\mathcal{G})^e}}$.

- b) W désigne l'image par l'injection canonique $\iota_{\beta\hat{\beta}}^\alpha : B(H_\beta \otimes_\alpha H, H_\alpha \otimes_{\hat{\beta}} H) \rightarrow B(H \otimes H)$ de l'unitaire-pseudo-multiplicatif [12] $\hat{V} := W_{\mathcal{G}}$.
- c) \tilde{V} désigne l'image par l'injection canonique $\iota_{\hat{\beta}\beta}^{\hat{\alpha}} : B(H_{\hat{\beta}} \otimes_{\hat{\alpha}} H, H_{\hat{\alpha}} \otimes_\beta H) \rightarrow B(H \otimes H)$ de l'unitaire-pseudo-multiplicatif [12] $\tilde{V} := W_{(\mathcal{G}^{\text{op}})^c}$.

Dans ce qui suit, nous récapitulons les principales propriétés vérifiées par W, V et \tilde{V} qui seront utilisées dans la suite. La preuve de ces résultats découle des propriétés [12] des unitaires pseudo-multiplicatifs dont ils sont les images (cf. [12, 7]).

2.9 Proposition. *Les opérateurs V, W, \tilde{V} sont des isométries partielles pentagonales agissant dans $H \otimes H$ et vérifient :*

- a) $W = \Sigma(U \otimes 1)V(U^* \otimes 1)\Sigma$, $\tilde{V} = \Sigma(1 \otimes U)V(1 \otimes U^*)\Sigma$ avec $U := \hat{J}J$
- b) $V^* = (J \otimes \hat{J})V(J \otimes \hat{J})$, $W^* = (\hat{J} \otimes J)W(\hat{J} \otimes J)$
- c) *Le support initial et le support final de chacune des isométries partielles pentagonales W, V, \tilde{V} est donné par les formules :*

$$V^*V = \tilde{V}\tilde{V}^* = q_{\hat{\alpha},\beta} , \quad W^*W = VV^* = q_{\beta,\alpha} , \quad WW^* = q_{\alpha,\hat{\beta}} , \quad \tilde{V}^*\tilde{V} = q_{\hat{\beta},\hat{\alpha}}$$

2.10 Proposition. *On a aussi les relations de commutation*

- a) $W_{12}V_{23} = V_{23}W_{12}$, $V_{12}\tilde{V}_{23} = \tilde{V}_{23}V_{12}$
- b) *Pour tout $n \in N$, on a :*

$$\begin{aligned} [V, \alpha(n) \otimes 1] &= [V, \hat{\beta}(n^o) \otimes 1] = [V, 1 \otimes \hat{\alpha}(n)] = [V, 1 \otimes \hat{\beta}(n^o)] = 0 \\ V(1 \otimes \alpha(n)) &= (\hat{\alpha}(n) \otimes 1)V , \quad V(\beta(n^o) \otimes 1) = (1 \otimes \beta(n^o))V \\ [W, \hat{\beta}(n^o) \otimes 1] &= [W, \hat{\alpha}(n) \otimes 1] = [W, 1 \otimes \beta(n^o)] = [W, 1 \otimes \hat{\alpha}(n)] = 0 \\ W(1 \otimes \hat{\beta}(n^o)) &= (\beta(n^o) \otimes 1)W , \quad W(\alpha(n) \otimes 1) = (1 \otimes \alpha(n))W \\ [\tilde{V}, \alpha(n) \otimes 1] &= [\tilde{V}, \beta(n^o) \otimes 1] = [\tilde{V}, 1 \otimes \alpha(n)] = [\tilde{V}, 1 \otimes \hat{\beta}(n^o)] = 0 \\ \tilde{V}(1 \otimes \beta(n^o)) &= (\hat{\beta}(n^o) \otimes 1)\tilde{V} , \quad \tilde{V}(\hat{\alpha}(n) \otimes 1) = (1 \otimes \hat{\alpha}(n))\tilde{V} \end{aligned}$$

- c) *Le coproduit de l'algèbre de von Neumann M vérifie :*

$$\delta(x) = V(x \otimes 1_H)V^* = W^*(1 \otimes x)W \quad , \quad x \in M$$

- d) *Le coproduit de l'algèbre de von Neumann \widehat{M}' , qu'on note $\hat{\delta}$, vérifie :*

$$\hat{\delta}(x) = V^*(1_H \otimes x)V = \tilde{V}(x \otimes 1_H)\tilde{V}^* \quad , \quad x \in \widehat{M}'$$

2.11 Notation. Contrairement à [12], on adopte pour l'algèbre de von Neumann \widehat{M} , le coproduit défini par :

$$\hat{\delta}_\lambda(x) = W(x \otimes 1_H)W^* \quad , \quad x \in \widehat{M}$$

Dans toute la suite, on note $\hat{\mathcal{G}}$ le groupoïde dual $(N^o, \widehat{M}', \beta, \hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{T}, \hat{T}', \epsilon)$ avec \hat{T} le poids opératoire défini par $\hat{\varphi}' = \epsilon \circ \beta^{-1} \circ \hat{T}$, $\hat{T}' = R_{\widehat{M}'} \circ \hat{T} \circ R_{\widehat{M}}$ et $R_{\widehat{M}'} : \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M}' : x \mapsto Jx^*J$

2.3 C*-algèbres de Hopf faibles associées à un groupoïde mesuré quantique [6, 7]

Nous rappelons (avec des notations et des conventions différentes), les définitions des C*-algèbres de Hopf faibles associées par De Commer [6, 7] à un groupoïde \mathcal{G} m.q de base N de dimension finie, ainsi que les principaux résultats de [6, 7] .

Avec les notations du paragraphe 2.2, posons :

$$S = [\{ (\omega \otimes \text{id})(V) \mid \omega \in B(H)_* \}] \quad , \quad \widehat{S} = [\{ (\text{id} \otimes \omega)(V) \mid \omega \in B(H)_* \}]$$

Nous avons :

- S et \widehat{S} sont des sous-C*-algèbres non dégénérées de $B(H)$, faiblement denses dans M et \widehat{M}' respectivement.

- On munit S et \widehat{S} des représentations fidèles et non dégénérées :

$$- L : S \rightarrow B(H) : x \mapsto x \quad , \quad R : S \rightarrow B(H) : x \mapsto UxU^* .$$

$$- \rho : \widehat{S} \rightarrow B(H) : x \mapsto x \quad , \quad \lambda : \widehat{S} \rightarrow B(H) : x \mapsto UxU^*$$

On rappelle que les *-automorphismes $\text{Ad } U$ et $\text{Ad } U^*$ coïncident sur M et \widehat{M} et on a (cf. [6, 7]) :

$$V \in M(\widehat{S} \otimes S) \quad , \quad W \in M(S \otimes \lambda(\widehat{S})) \quad , \quad \widetilde{V} \in M(R(S) \otimes \widehat{S}) \quad (2.2)$$

- $[S, R(S)] = [\widehat{S}, \lambda(\widehat{S})] = 0$

- les *-morphisms :

$$\delta : S \rightarrow M(S \otimes S) : x \mapsto V(x \otimes 1_H)V^* \quad , \quad \widehat{\delta} : \widehat{S} \rightarrow M(\widehat{S} \otimes \widehat{S}) : x \mapsto V^*(1_H \otimes x)V$$

se prolongent de façon unique à $M(S)$ et $M(\widehat{S})$ respectivement en des *-morphisms $\delta : M(S) \rightarrow M(S \otimes S)$ et $\widehat{\delta} : M(\widehat{S}) \rightarrow M(\widehat{S} \otimes \widehat{S})$, strictement continus et vérifiant

$$\delta(1_S) = q_{\beta, \alpha} \quad , \quad \widehat{\delta}(1_{\widehat{S}}) = q_{\widehat{\alpha}, \beta}$$

- δ et $\widehat{\delta}$ sont coassociatifs et vérifient :

$$[\delta(S)(1_S \otimes S)] = [\delta(S)(S \otimes 1_S)] = \delta(1_S)(S \otimes S) \quad , \quad [\widehat{\delta}(\widehat{S})(1_{\widehat{S}} \otimes \widehat{S})] = [\widehat{\delta}(\widehat{S})(\widehat{S} \otimes 1_{\widehat{S}})] = \widehat{\delta}(1_{\widehat{S}})(\widehat{S} \otimes \widehat{S}) \quad (2.3)$$

- Les *-morphisms $\alpha : N \rightarrow M(S)$ et $\beta : N^o \rightarrow M(S)$ vérifient :

$$\delta(\alpha(n)) = \delta(1_S)(\alpha(n) \otimes 1_S) \quad , \quad \delta(\beta(n^o)) = \delta(1_S)(1_S \otimes \beta(n^o)) \quad , \quad n \in N$$

- Les *-morphisms $\beta : N^o \rightarrow M(\widehat{S})$ et $\widehat{\alpha} : N \rightarrow M(\widehat{S})$ vérifient :

$$\widehat{\delta}(\beta(n^o)) = \widehat{\delta}(1_{\widehat{S}})(\beta(n^o) \otimes 1_S) \quad , \quad \widehat{\delta}(\widehat{\alpha}(n)) = \widehat{\delta}(1_{\widehat{S}})(1_S \otimes \widehat{\alpha}(n)) \quad , \quad n \in N$$

2.12 Notations. On désigne par $S\widehat{S}$ l'espace vectoriel fermé engendré par les produits xy , où $x \in S$ et $y \in \widehat{S}$. On a donc $S\widehat{S} = [\{ (\omega_1 \otimes \text{id} \otimes \omega_2)(V_{12}V_{23}) \mid \omega_1, \omega_2 \in B(H)_* \}]$.

Posons aussi $\mathcal{C}(V) := [\{ (\text{id} \otimes \omega)\Sigma V \mid \omega \in B(H)_* \}]$. Il est facile de voir que $\mathcal{C}(V)$ est une algèbre, la preuve est identique à celle ([2] 3.2).

On note $(e^{(l)})_{l=1, \dots, k}$, les projecteurs centraux minimaux de la C*-algèbre $N = \oplus_{l=1}^k M_{n_l}$

Le principal résultat de ce paragraphe est :

2.13 Théorème. *Il existe des scalaires λ_l , $|\lambda_l| = 1$ $l = 1, \dots, k$ uniques vérifiant :*

$$(1 \otimes U)\Sigma WV\tilde{V} = \sum_{l=1}^k \lambda_l (\hat{\beta}(e^{(l)}) \otimes \hat{\alpha}(e^{(l)})) q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}}$$

Pour la preuve du théorème, on a besoin du lemme suivant :

2.14 Lemme. *Soient $\alpha : N \rightarrow B(H), \beta : N^o \rightarrow B(H)$ deux $*$ -morphisms unitales. Alors on a :*

- a) $q_{\beta, \alpha}(\beta(N^o) \otimes \alpha(N)) q_{\beta, \alpha} = \oplus_l \mathbf{C}.(\beta(e^{(l)o}) \otimes \alpha(e^{(l)})) q_{\beta, \alpha}$
- b) $q_{\alpha, \beta}(\alpha(N) \otimes \beta(N^o)) q_{\alpha, \beta} = \oplus_l \mathbf{C}.(\alpha(e^{(l)}) \otimes \beta(e^{(l)o})) q_{\alpha, \beta}$

Démonstration. Montrons le a), la preuve du b) est similaire.

Soient $x, y \in N$, on a :

$$q_{\beta, \alpha}(\beta(x^o) \otimes \alpha(y)) q_{\beta, \alpha} = \sum_l \frac{1}{n_l^2} \varepsilon(yx e^{(l)}) (\beta(e^{(l)o}) \otimes \alpha(e^{(l)})) q_{\beta, \alpha}$$

Par bilinéarité, il suffit de vérifier cette relation pour $x = e_{ij}^l$ et $y = e_{rs}^{l'}$.

$$\begin{aligned} q_{\beta, \alpha}(\beta(e_{ij}^{(l)o}) \otimes \alpha(e_{rs}^{l'})) q_{\beta, \alpha} &= \delta_l^{l'} \delta_i^s \delta_j^r \frac{1}{n_l^2} \sum_{a,b=1}^{n_l} (\beta(e_{ba}^{(l)o} e^{(l)o}) \otimes \alpha(e_{ab}^l)) \\ &= \sum_{l''} \frac{1}{n_{l''}^2} \varepsilon(e_{rs}^{l'} e_{ij}^l e^{(l'')}) (\beta(e^{(l'')o}) \otimes \alpha(e^{(l'')})) q_{\beta, \alpha} \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème. Posons $T := (1 \otimes U)\Sigma \hat{V} V \tilde{V}$. On a $T \in B(H \otimes H)$ est une isométrie partielle vérifiant (2.9 c) :

$$T \in q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}}(\hat{\beta}(N) \otimes \hat{\alpha}(N)) q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}} \quad , \quad T^* T = \tilde{V}^* \tilde{V} = q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}}$$

il existe alors (2.14) des scalaires λ_l vérifiant $T = \sum_{l=1}^k \lambda_l (\hat{\beta}(e^{(l)o}) \otimes \hat{\alpha}(e^{(l)})) q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}}$. Par injectivité de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, $(\hat{\beta}(e^{(l)o}) \otimes \hat{\alpha}(e^{(l)})) q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}} \neq 0$ pour tout l . On en déduit :

$$T^* T = \sum_{l=1}^k |\lambda_l|^2 (\hat{\beta}(e^{(l)o}) \otimes \hat{\alpha}(e^{(l)})) q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}} = q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}}$$

d'où le résultat. □

2.15 Corollaire. $S\hat{S}$ est une C^* -algèbre et on a $S\hat{S} = UC(V)U^*$.

Le corollaire se déduit directement des trois lemmes suivants que nous allons établir.

2.16 Lemme. *Posons $B = [\{\delta(x)(1_H \otimes y) \mid x \in S, y \in \hat{S}\}]$. Nous avons :*

- a) B est stable par involution.
- b) Il existe une forme positive normale $\omega \in B(H)_*^+$, vérifiant $S\hat{S} = (\omega \otimes \text{id})(WBW^*)$.
- c) $S\hat{S}$ est stable par involution.

Démonstration. Par **(2.9 c)**, on a $[V^*V, S \otimes 1_H] = 0$. Soit $\omega \in B(H)_*$, posons $y = (\text{id} \otimes \omega)(V)$. Pour tout $x \in S$, on a :

$$\begin{aligned} (1_H \otimes y)\delta(x) &= (1_H \otimes (\text{id} \otimes \omega)(V))\delta(x) = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega)(V_{23}\delta(x)_{12}) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega)(V_{23}V_{23}^*V_{23}\delta(x)_{12}) = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega)(V_{23}\delta(x)_{12}V_{23}^*V_{23}) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega)((\text{id} \otimes \delta)(\delta(x))V_{23}) = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega)((\delta \otimes \text{id})(\delta(x))V_{23}) \end{aligned}$$

Posons $\omega = \omega' \cdot s$ avec $\omega' \in B(H)_*$ et $s \in S$. On déduit :

$$\begin{aligned} (1_H \otimes y)\delta(x) &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega')((q_{\beta, \alpha} \otimes s)(\delta \otimes \text{id})(\delta(x))V_{23}) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega')(((\delta \otimes \text{id})((1_S \otimes s)\delta(x))V_{23})) \end{aligned}$$

Comme $[(1_S \otimes S)\delta(S)] \subset S \otimes S$, on a $(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega')(((\delta \otimes \text{id})((1_S \otimes s)\delta(x))V_{23})) \in B$, ce qui prouve le a). On a $WW^* = q_{\alpha, \hat{\beta}}$ (**2.9 c**), donc $[WW^*, 1_H \otimes S\hat{S}] = 0$. On en déduit en utilisant **(2.10 c)** :

$$(1_H \otimes S\hat{S})WW^* = WW^*(1_H \otimes S\hat{S})WW^* = WBW^*$$

Soit $(e_{ij}^{(l)})_{i,j=1,\dots,n_l, l=1,\dots,k}$ un s.u.m pour la C*-algèbre $N = \oplus_{l=1}^k M_{n_l}$. Il est clair qu'il existe une forme $\omega \in B(H)_*^+$ vérifiant $\omega(\alpha(e_{ij}^{(l)})) = \delta_i^j n_l$, donc $(\omega \otimes \text{id})q_{\alpha, \hat{\beta}} = 1_H$.

Il en résulte que $S\hat{S} = (\omega \otimes \text{id})((1_H \otimes S\hat{S})WW^*) = (\omega \otimes \text{id})(WBW^*)$, d'où le b).

Le c) est une conséquence du a) et du b). □

2.17 Lemme. On a $S\hat{S} = [(\text{id} \otimes \omega)(WV) \mid \omega \in B(H)_*]$.

Démonstration. Soient $s = (\text{id} \otimes \omega)(W)$ et $x \in \hat{S}$. On a en utilisant (bf 2.9 c) :

$$sx = (\text{id} \otimes \omega)(W(x \otimes 1)) = (\text{id} \otimes \omega)(WV V^*(x \otimes 1))$$

En posant $\omega = s' \cdot \omega'$ avec $s' \in S$, on déduit que $sx \in [(\text{id} \otimes \omega')(WV)x' \mid \omega' \in B(H)_*, x' \in \hat{S}]$.

Pour $\omega \in B(H)_*, x \in \hat{S}$, on a $(\text{id} \otimes \omega)(WV)x = (\text{id} \otimes \omega)(WV V^*V(x \otimes 1))$. En posant $\omega = x' \omega'$ avec $x' \in \hat{S}$, on obtient **(2.10 d)** que $(\text{id} \otimes \omega)(WV V^*V(x \otimes 1)) \in [(\text{id} \otimes \omega')(WV \hat{\delta}(x')) \mid x' \in \hat{S}, \omega' \in B(H)_*]$. Mais pour $\omega' \in B(H)_*, x' \in \hat{S}$, on a $(\text{id} \otimes \omega')(WV \hat{\delta}(x')) = (\text{id} \otimes \omega')(WV V^*(1 \otimes x')V) = (\text{id} \otimes \omega'x')(WV)$, d'où les inclusions $S\hat{S} \subset [(\text{id} \otimes \omega)(WV)x \mid \omega \in B(H)_*, x \in \hat{S}] \subset [(\text{id} \otimes \omega)(WV) \mid \omega \in B(H)_*]$.

Montrons maintenant l'inclusion $[(\text{id} \otimes \omega)(WV) \mid \omega \in B(H)_*] \subset S\hat{S}$.

Soit $\omega \in B(H)_*$. Posons $\omega = x' \omega' x$ avec $\omega' \in B(H)_* \mid x, x' \in \hat{S}$. On a

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \omega)(WV) &= (\text{id} \otimes x' \omega')(W(1 \otimes x)V) = (\text{id} \otimes x' \omega')(WV V^*(1 \otimes x)V) \\ &= (\text{id} \otimes \omega')(WV \hat{\delta}(x)(1 \otimes x')) \in [(\text{id} \otimes \omega)(WV)x \mid \omega \in B(H)_*, x \in \hat{S}] \end{aligned}$$

.

Finalement, pour $\omega \in B(H)_*, x \in \hat{S}$, posons $\omega = s \omega'$ avec $s \in S$. On a

$$(\text{id} \otimes \omega)(WV)x = (\text{id} \otimes \omega')[WV(x \otimes s)] \in S\hat{S}$$

□

2.18 Lemme. $S\hat{S} = U^*[(\text{id} \otimes \omega)(V^*\Sigma) \mid \omega \in B(H)_*]U = U^*C(V)U = UC(V)U^*$.

En particulier, $C(V) = [(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma V) \mid \omega \in B(H)_*]$ est une C^* -algèbre.

Démonstration. On a en utilisant (2.9 c), 2.13)

$$\begin{aligned} WV &= WV V^* V = WV \tilde{V} \tilde{V}^* = \Sigma(1_H \otimes U^*) \left(\sum_{l=1}^k \lambda_l(\hat{\beta}(e^{(l)}) \otimes \hat{\alpha}(e^{(l)})) q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}} \right) \tilde{V}^* \\ &= \Sigma(1_H \otimes U^*) \left(\sum_{l=1}^k \lambda_l(\hat{\beta}(e^{(l)}) \otimes \hat{\alpha}(e^{(l)})) \tilde{V}^* \right) = \Sigma(1_H \otimes U^*) \left(\sum_{l=1}^k \lambda_l(\hat{\beta}(e^{(l)}) \otimes 1_H) \right) \tilde{V}^* \\ &= (1_H \otimes \sum_{l=1}^k \lambda_l \hat{\beta}(e^{(l)})) \Sigma(1_H \otimes U^*) \tilde{V}^* = (1_H \otimes \sum_{l=1}^k \lambda_l \hat{\beta}(e^{(l)})) (U^* \otimes U^*) V^* \Sigma(U \otimes 1_H) \end{aligned}$$

Comme $\sum_{l=1}^k \lambda_l \hat{\beta}(e^{(l)}) U^*$ est un unitaire, on déduit (2.17)

$$S\hat{S} = [(\text{id} \otimes \omega)(WV) \mid \omega \in B(H)_*] = U^*[(\text{id} \otimes \omega)(V^*\Sigma) \mid \omega \in B(H)_*]U$$

Mais $S\hat{S}$ étant une C^* -algèbre, on a aussi $S\hat{S} = U^*C(V)U = UC(V)U^*$. □

2.19 Remarque. Grace aux deux relations $V^* = (J \otimes \hat{J})V(J \otimes \hat{J})$ et $W^* = (\hat{J} \otimes J)W(\hat{J} \otimes J)$, on peut procéder comme dans [3] pour prouver que $\mathcal{C}(\tilde{V}) := [(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma \tilde{V}) \mid \omega \in B(H)_*]$ et $\mathcal{C}(W) := [(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma W) \mid \omega \in B(H)_*]$ sont des C^* -algèbres et vérifient :

$$S\lambda(\hat{S}) = \mathcal{C}(\tilde{V}) \quad , \quad R(S)\hat{S} = \mathcal{C}(W)$$

2.4 Groupoïde mesuré associé à une équivalence monoidale

Il s'agit d'un groupoïde m.q de base $N = \mathbb{C}^2$, introduit par De Commer [6, 7]. Avant de donner sa définition, nous rappelons les définitions et les résultats fondamentaux de [6] portant sur l'équivalence monoidale des groupes quantiques localement compacts, que nous utiliserons.

Soit G un groupe quantique l.c.

2.20 Definition. Une action galoisienne à droite du groupe G dans une algèbre de von Neumann N , est une coaction $\alpha_N : N \rightarrow N \otimes L^\infty(G)$ ergodique, intégrable et telle que le produit croisé $N \rtimes G$ soit un facteur de type I.

Le couple (N, α_N) est appelé objet galoisien à droite du groupe G .

De façon similaire, on définit aussi les actions galoisiennes et les objets galoisiens à gauche pour G .

Fixons un objet galoisien à droite (N, α_N) du groupe G . Dans sa thèse [6, 7], De Commer construit un groupe quantique l.c H , muni d'une action galoisienne à gauche $\gamma_N : N \rightarrow L^\infty(H) \otimes N$ qui commute avec α_N .

De façon canonique, il associe aussi à l'objet galoisien à droite (N, α_N) de G , un objet galoisien à droite (O, α_O) pour le groupe H , et une action galoisienne à gauche $\gamma_O : O \rightarrow L^\infty(G) \otimes O$ pour le groupe G , qui commute avec α_O .

Finalement, De Commer a construit [6, 7] un groupoïde mesuré $\mathcal{G}_{H,G} = (\mathbb{C}^2, M, \alpha, \beta, \delta, T, T', \varepsilon)$, où $M := L^\infty(H) \oplus N \oplus O \oplus L^\infty(G)$, dont l'axiomatique traduit toutes les propriétés des coactions ou coproduits des quatre algèbres $L^\infty(H), N, O, L^\infty(G)$, ainsi que celles des poids invariants ou de Haar sous-jacents. Plus précisément, le coproduit $\delta : M \rightarrow M \otimes M$ est formé par les coactions ou coproduits des quatre algèbres composant M . Les poids opératoriels T et T' sont déduits des poids invariants par les coactions ou de Haar. De plus, les $*$ -morphisms α et β sont à valeurs dans le centre de M et leurs images engendrent une copie de l'algèbre \mathbb{C}^4 .

Réciproquement, il est facile de voir qu'un groupoïde $\mathcal{G} = (\mathbb{C}^2, M, \alpha, \beta, \Gamma, T, T', \varepsilon)$, où les applications source et but vérifient les hypothèses précédentes, est de façon unique, de la forme $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{H,G}$ avec H et G des groupes quantiques l.c. uniques à isomorphisme près.

Dans ce qui suit, on se fixe un groupoïde mesuré $\mathcal{G} = (\mathbb{C}^2, M, \alpha, \beta, \delta, T, T', \varepsilon)$, où les $*$ -morphisms α et β sont à valeurs dans le centre de M avec des images qui engendrent une copie de l'algèbre \mathbb{C}^4 .

2.21 Lemme. *on a $\alpha = \widehat{\beta}$ et $\beta = \widehat{\alpha}$.*

Démonstration. On a ([12] **3.6**) $\widehat{\beta}(n) = J\alpha(n)^*J = \alpha(n)$ car $\alpha(n)$ est central dans M .

De même, on a ([12] **3.8**) $J\beta(n)^*J = \beta(n) = \widehat{J}\alpha(n)^*\widehat{J}$, d'où $\beta = \text{Ad } U \circ \alpha = \widehat{\alpha}$. □

Avec les notations introduites dans le paragraphe 2.2, on se propose de préciser les représentations régulières V et W de \mathcal{G} , ainsi que les deux groupes quantiques l.c. que détermine \mathcal{G} .

D'abord, on identifie M à son image dans $B(H)$ par la représentation GNS du poids $\varphi = \varepsilon \circ \alpha^{-1} \circ T$. Posons $\psi = \varepsilon \circ \beta^{-1} \circ T'$.

2.22 Notations. *Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 . Pour tout i, j , posons*

$$p_{ij} := \alpha(\varepsilon_i)\beta(\varepsilon_j) \quad , \quad M_{ij} := p_{ij}M \quad , \quad H_{ij} = p_{ij}H \quad , \quad \varphi_{ij} := \varphi|_{M_{ij}} \quad , \quad \psi_{ij} := \psi|_{M_{ij}}$$

On a facilement :

$$\alpha(\varepsilon_i) = p_{i1} + p_{i2} \quad , \quad \beta(\varepsilon_j) = p_{1j} + p_{2j} \quad , \quad M = \oplus_{i,j} M_{ij} \quad , \quad \delta(p_{ij}) = \sum_{k=1}^2 p_{ik} \otimes p_{kj} \quad , \quad H = \oplus_{i,j} H_{ij}$$

Le poids φ_{ij} est nsff sur l'algèbre de von Neumann M_{ij} et sa représentation GNS s'obtient par restriction à $M_{ij} \subset M$, de la représentation GNS de φ . En particulier, l'espace de Hilbert $L^2(M_{ij}, \varphi_{ij})$ s'identifie à H_{ij} .

En utilisant (2.10 b)), on obtient :

2.23 Proposition. *Pour tout i, j, k, l , on a :*

$$(p_{ij} \otimes 1_H)V(p_{kl} \otimes 1_H) = \delta_k^i(p_{ij} \otimes p_{jl})V(p_{il} \otimes p_{jl}) \quad , \quad (1_H \otimes p_{ij})W(1_H \otimes p_{kl}) = \delta_j^l(p_{ik} \otimes p_{ij})W(p_{ik} \otimes p_{kj})$$

2.24 Notations. $V_{jl}^i := (p_{ij} \otimes p_{jl})V(p_{il} \otimes p_{jl})$, $W_{ik}^j = (p_{ik} \otimes p_{ij})W(p_{ik} \otimes p_{kj})$, $\widetilde{V}_{ki}^j = (p_{ki} \otimes p_{ji})\widetilde{V}(p_{ki} \otimes p_{jk})$

Les opérateurs unitaires

$$V_{jl}^i : H_{il} \otimes H_{jl} \rightarrow H_{ij} \otimes H_{jl} \quad , \quad W_{ik}^j : H_{ik} \otimes H_{kj} \rightarrow H_{ik} \otimes H_{ij} \quad , \quad \widetilde{V}_{ki}^j : H_{ki} \otimes H_{jk} \rightarrow H_{ki} \otimes H_{ji}$$

vérifient les relations suivantes :

2.25 Proposition. Pour tout $i, j, k, l = 1, 2$, nous avons :

$$a) (V_{jk}^i)_{12}(V_{kl}^j)_{13}(V_{kl}^j)_{23} = (V_{kl}^j)_{23}(V_{jl}^i)_{12} \quad , \quad (W_{ij}^k)_{12}(W_{ij}^l)_{13}(W_{jk}^l)_{23} = (W_{ik}^l)_{23}(W_{ij}^k)_{12}$$

$$(\tilde{V}_{ji}^k)_{12}(\tilde{V}_{ji}^l)_{13}(\tilde{V}_{kj}^l)_{23} = (\tilde{V}_{ki}^l)_{23}(\tilde{V}_{ji}^k)_{12}$$

$$b) \text{ (relations de commutation) : } V_{kj,23}^l W_{ll',12}^j = W_{ll',12}^k V_{kj,23}^{l'} \quad , \quad V_{kj,12}^s \tilde{V}_{kj,23}^i = \tilde{V}_{kj,23}^i V_{kj,12}^s$$

c) Pour tout $\omega \in B(H)_*$, on a :

$$(\text{id} \otimes p_{jl} \omega p_{jl})(V_{jl}^i) = p_{ij}(\text{id} \otimes \omega)(V) p_{il} \quad , \quad (p_{ik} \omega p_{ik} \otimes \text{id})(W_{ik}^j) = p_{ij}(\omega \otimes \text{id})(W) p_{kj}$$

Les relations pentagonales a) et les relations de commutation b) résultent de celles vérifiées par V et W (**2.10 a**). La preuve de c) s'obtient par calcul direct en utilisant (**2.10 b**)).

Rappelons que le coproduit δ (resp. $\hat{\delta}$) de la C^* -algèbre S (resp. \hat{S}), est donné par

$$\delta(x) = V(x \otimes 1)V^* = W^*(1 \otimes x)W \quad , \quad x \in S \quad (\text{resp. } \hat{\delta}(x) = V^*(1 \otimes x)V = \tilde{V}(x \otimes 1)\tilde{V}^* \quad , \quad x \in \hat{S}) \quad (2.4)$$

2.26 Notations. a) Posons $S_{ij} = p_{ij}S$. On identifie les C^* -algèbres $M(S_{ij})$, (resp. $M(S_{ij} \otimes S_{kl})$) et $p_{ij}M(S) \subset B(H)$, (resp. $(p_{ij} \otimes p_{kl})M(S \otimes S) \subset B(H \otimes H)$).

b) Pour tout $x \in S_{ij}$, posons $\delta_{ij}^k(x) = (p_{ik} \otimes p_{kj})\delta(x) \in M(S_{ik} \otimes S_{kj})$.

2.27 Proposition. [6, 7] Pour tout $i, j, k, l = 1, 2$, on a :

$$a) (\delta_{ik}^l \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \circ \delta_{ij}^k = (\text{id}_{S_{il}} \otimes \delta_{lj}^k) \circ \delta_{ij}^l$$

$$b) \text{ Pour tout } x \in S_{ij}, \text{ on a } \delta_{ij}^k(x) = (W_{ik}^j)^*(1_{H_{ik}} \otimes x)W_{ik}^j = V_{kj}^i(x \otimes 1_{H_{kj}})(V_{kj}^i)^*.$$

Le résultat suivant joue un rôle central dans la suite :

2.28 Proposition. Les projecteurs $\beta(\varepsilon_1), \beta(\varepsilon_2)$ de la C^* -algèbre $M(\hat{S})$, vérifient :

$$a) \beta(\varepsilon_1) + \beta(\varepsilon_2) = 1_{\hat{S}} \quad , \quad \hat{\delta}(\beta(\varepsilon_j)) = \beta(\varepsilon_j) \otimes \beta(\varepsilon_j).$$

$$b) [\hat{S}\beta(\varepsilon_j)\hat{S}] = \hat{S}.$$

Démonstration. le a) est évident. Rappelons que dans [6, 7], De Commer a montré que l'espace vectoriel engendré par $\widehat{M}\alpha(\varepsilon_1)\widehat{M}$ est faiblement dense dans \widehat{M} . Il en résulte que le b) est donné par le résultat plus général qui suit. \square

2.29 Proposition. Soit $n \in N$ un projecteur. Supposons que l'espace vectoriel engendré par $\widehat{M}\alpha(n)\widehat{M}$ est faiblement dense dans \widehat{M} . Alors l'espace vectoriel engendré par $\hat{S}\hat{\alpha}(n)\hat{S}$ est normiquement dense dans \hat{S} .

Démonstration. Montrons d'abord que $[(1 \otimes \lambda(\hat{S}))V(1 \otimes \lambda(\hat{S})V^*)] = \rho(\hat{S}) \otimes \lambda(\hat{S})q_{\beta,\alpha}$.

D'après [7], on a $[(\rho(\hat{S}) \otimes 1)\hat{\delta}(\rho(\hat{S}))] = (\rho(\hat{S}) \otimes \rho(\hat{S}))q_{\hat{\alpha},\beta}$.

Mais tout $x \in \hat{S}$, on a (**2.4 2**) $V(1 \otimes \lambda(x)V^* = (1 \otimes U)\Sigma V^*(1 \otimes \rho(x))V\Sigma(1 \otimes U^*)$. il en résulte que $[(1 \otimes \lambda(\hat{S}))V(1 \otimes \lambda(\hat{S})V^*)] = \rho(\hat{S}) \otimes \lambda(\hat{S})q_{\beta,\alpha}$.

Pour tout $x, x' \in \hat{S}$, on a $(1 \otimes \lambda(x))V(1 \otimes \lambda(x')) = (1 \otimes \lambda(x))V(1 \otimes \lambda(x'))q_{\hat{\alpha},\beta} = (1 \otimes \lambda(x))V(1 \otimes \lambda(x'))V^*V$.

On en déduit que $[(1 \otimes \lambda(\hat{S}))V(1 \otimes \lambda(\hat{S}))] = \rho(\hat{S}) \otimes \lambda(\hat{S})q_{\beta,\alpha}V = \rho(\hat{S}) \otimes \lambda(\hat{S})V$, donc

$$[(\text{id} \otimes \omega)(1 \otimes \lambda(\hat{S}))V(1 \otimes \lambda(\hat{S})) \mid \omega \in B(H)_*] = \hat{S}$$

Grace à cette égalité et l'hypothèse, on a

$$[\{(\text{id} \otimes \omega_{\xi, \eta})(1 \otimes \lambda(x))V(1 \otimes \lambda(x')\alpha(n)) \mid x, x' \in \widehat{S} \mid \xi, \eta \in H\}] = \widehat{S}$$

Mais par le calcul précédent, on a pour $x, x' \in \widehat{S}$:

$$(1 \otimes \lambda(x))V(1 \otimes \lambda(x')\alpha(n)) = (1 \otimes \lambda(x))V(1 \otimes \lambda(x'))V^*V(1 \otimes \alpha(n)) \in (\widehat{S} \otimes \lambda(\widehat{S}))V(1 \otimes \alpha(n))$$

Mais on a par **(2.10 b)**) $(\widehat{\alpha}(n) \otimes 1)V = V(1 \otimes \alpha(n))$, donc :

$$[\{(\text{id} \otimes \omega_{\xi, \eta})(1 \otimes \lambda(x))V(1 \otimes \lambda(x')\alpha(n)) \mid x, x' \in \widehat{S} \mid \xi, \eta \in H\}] \subset [\widehat{S}\widehat{\alpha}(n)\widehat{S}]$$

□

2.30 Notations. Pour tout $i, j, k = 1, 2 \mid x \in \widehat{S}$ et $y \in \lambda(\widehat{S})$, posons :

- a) $x_{ij} := \beta(\varepsilon_i)x\beta(\varepsilon_j) \in \widehat{S}$, $\widehat{\pi}_i(x_{jk}) = p_{ij}xp_{ik}$, $y_{ij} := \alpha(\varepsilon_i)y\alpha(\varepsilon_j) \in \lambda(\widehat{S})$, $\widehat{\pi}^i(y_{jk}) = p_{ji}yp_{ki}$
- b) $E_{jk}^i := [\{\widehat{\pi}_i(x_{jk}) \mid x \in \widehat{S}\}] \subset B(H_{ik}, H_{ij})$, $E_{jk, \lambda}^i = UE_{jk}^iU^* = [\{\widehat{\pi}^i(\lambda(x_{jk})) \mid x \in \widehat{S}\}] \subset B(H_{ki}, H_{ji})$

2.31 Proposition. Pour $\omega \in B(H)_*$, posons $x = (\text{id} \otimes \omega)(V)$. Pour tout $i, j, k, l = 1, 2$, nous avons :

- a) $\widehat{\pi}_i(x_{jl}) = (\text{id} \otimes p_{jl}\omega p_{jl})(V_{jl}^i)$, $\widehat{\pi}^j(\lambda(x_{ik})) = (p_{ik}\omega p_{ik} \otimes \text{id})(W_{ik}^j)$
- b) $(\widehat{\pi}_k \otimes \widehat{\pi}_l)\widehat{\delta}(x_{ij}) = (V_{li}^k)^*(1_{H_{kl}} \otimes \widehat{\pi}_l(x_{ij}))V_{lj}^k = \widetilde{V}_{ki}^l(\widehat{\pi}_k(x_{ij}) \otimes 1_{H_{lk}})(\widetilde{V}_{kj}^l)^*$, $x \in \widehat{S}$
- c) $[E_{jl}^i H_{il}] = H_{ij}$.
- d) $(E_{jl}^i)^* = E_{lj}^i$, $[E_{jk}^i \circ E_{kl}^i] = E_{jl}^i$

Démonstration. Le a) s'obtient par un calcul direct.

Le coproduit $\widehat{\delta} : \widehat{S} \rightarrow M(\widehat{S} \otimes \widehat{S})$ vérifie $\widehat{\delta}(x) = V^*(1 \otimes x)V = \widetilde{V}(x \otimes 1)\widetilde{V}^*$, d'où le b).

Le c) résulte du fait que chaque opérateur V_{jl}^i est un unitaire.

L'égalité $(E_{jl}^i)^* = E_{lj}^i$ et l'inclusion $[E_{jk}^i \circ E_{kl}^i] \subset E_{jl}^i$ sont immédiates.

Pour tout $\omega, \omega' \in B(H)_*$, considérons la forme normale $\Phi \in B(H)_*$ définie par :

$$\Phi : x \mapsto (p_{jk}\omega p_{jk} \otimes p_{kl}\omega' p_{kl})(V(x \otimes 1)V^*) = (p_{jk}\omega p_{jk} \otimes p_{kl}\omega' p_{kl})(V_{kl}^j(p_{jl}xp_{jl} \otimes 1)(V_{kl}^j)^*) \quad (2.5)$$

On a $\Phi = p_{jl}\Phi p_{jl}$ et comme $V_{kl}^j : H_{jl} \otimes H_{kl} \rightarrow H_{jk} \otimes H_{kl}$ est unitaire, il est clair que l'espace vectoriel engendré par ces formes normales Φ , est dense dans $B(H_{jl})_*$.

On en déduit que $E_{jl}^i = [(\text{id} \otimes \Phi)(V) \mid \Phi \text{ comme dans 2.5}]$.

Avec $\omega, \omega' \in B(H)_*$ et Φ comme dans 2.5, posons $x = (\text{id} \otimes \omega)(V)$, $y = (\text{id} \otimes \omega')(V)$ et $z = (\text{id} \otimes \Phi)(V)$. la relation $(V_{jk}^i)_{12}(V_{kl}^i)_{13} = (V_{kl}^j)_{23}(V_{jl}^i)_{12}(V_{kl}^j)_{23}^*$, nous donne immédiatement $\widehat{\pi}_i(x_{jk})\widehat{\pi}_i(y_{kl}) = \widehat{\pi}_i(z_{jl})$, d'où l'inclusion $E_{jl}^i \subset [E_{jk}^i \circ E_{kl}^i]$. □

2.32 Corollaire. Pour tout $i = 1, 2$, on a des représentations fidèles et non dégénérées :

$$\widehat{\pi}_i : \widehat{S} \rightarrow B(H_{i1} \oplus H_{i2}) \quad , \quad \widehat{\pi}^i : \lambda(\widehat{S}) \rightarrow B(H_{1i} \oplus H_{2i})$$

définies par :

$$\widehat{\pi}_i(x) = \begin{pmatrix} p_{i1}xp_{i1} & p_{i1}xp_{i2} \\ p_{i2}xp_{i1} & p_{i2}xp_{i2} \end{pmatrix} \quad \widehat{\pi}^i(x) = \begin{pmatrix} p_{1i}xp_{1i} & p_{1i}xp_{2i} \\ p_{2i}xp_{1i} & p_{2i}xp_{2i} \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il résulte de (2.31 c)) que la représentation $\widehat{\pi}_i$ est non dégénérée. Soit $x \in \widehat{S}$ tel que $\widehat{\pi}_i(x) = 0$. On a donc $\alpha(\varepsilon_i)x = 0$. Comme $1 - \alpha(\varepsilon_i) \in \widehat{M}$, ce projecteur est limite faible de sommes finies d'éléments de la forme $y\alpha(\varepsilon_i)y'$ avec $y, y' \in \widehat{M}$, donc $x = 0$.
La preuve pour la représentation $\widehat{\pi}^i$ est similaire. \square

2.33 Corollaire. *Pour tout $i, j, k, l = 1, 2$, $E_{lk}^i \otimes S_{jl}$, (resp. $S_{ik} \otimes E_{kl,\lambda}^j$) est un C^* -module sur $E_{kk}^i \otimes S_{jl}$, (resp. $S_{ik} \otimes E_{il,\lambda}^j$) et on a :*

$$V_{jl}^i \in \mathcal{L}(E_{lk}^i \otimes S_{jl}, E_{jk}^i \otimes S_{jl}) \quad , \quad W_{ik}^j \in \mathcal{L}(S_{ik} \otimes E_{kl,\lambda}^j, S_{ik} \otimes E_{il,\lambda}^j)$$

Ce sont des conséquences de $V \in M(\widehat{S} \otimes S)$ et $W \in M(S \otimes \lambda(\widehat{S}))$.

2.34 Proposition. *a) $G_i := (M_{ii}, \delta_{ii}^i, \varphi_{ii}, \psi_{ii})$, est un groupe quantique localement compact.*

- b) (M_{ij}, δ_{ij}^j) est une action galoisienne à droite pour le groupe quantique G_j et V_{jj}^i est l'implémentation canonique [21] de cette action.*
- c) (M_{ij}, δ_{ij}^i) est une action galoisienne à gauche pour le groupe quantique G_i et W_{ii}^j est l'implémentation canonique [21] de cette action.*
- d) Les deux actions δ_{ij}^j et δ_{ij}^i sur M_{ij} , commutent.*
- e) $W_{12}^2 = \Sigma \widetilde{G}^* \Sigma$, où \widetilde{G} est l'opérateur de Galois introduit [6] par De Commer.*

La preuve de ces résultats se déduit de l'axiomatique du groupoïde sous-jacent, de la définition et des propriétés des représentations régulières V et W . Donnons par exemple la preuve que la représentation normale $\sigma : M_{ij} \rtimes G_j \rightarrow B(H_{ij})$ définie [21] par l'implémentation canonique, est fidèle.

Pour tout $x \in M_{ij}$, on a $\delta_{ij}^j(x) = (W_{ij}^j)^*(1_{H_{ij}} \otimes x)W_{ij}^j = V_{jj}^i(x \otimes 1_{H_{jj}})(V_{jj}^i)^*$.

La relation 2.25 b) $W_{ij,12}^j V_{jj,23}^j = V_{jj,23}^i W_{ij,12}^j$ entraîne que pour tout $x \in M_{ij}$, $y \in (\widehat{M}_{jj})'$, on a :

$$W_{ij,12}^j \delta_{ij}^j(x)(1_{H_{ij}} \otimes y) (W_{ij,12}^j)^* = 1_{H_{ij}} \otimes \sigma(\delta_{ij}^j(x)(1 \otimes y))$$

Terminons ce paragraphe par la notation-définition suivante :

2.35 Notation-définition. *Un groupoïde mesuré quantique de la forme $\mathcal{G} = (\mathbb{C}^2, M, \alpha, \beta, \delta, T, T', \varepsilon)$, où les $*$ -morphisms α et β sont à valeurs dans le centre de M avec des images qui engendrent une copie de l'algèbre \mathbb{C}^4 , sera noté \mathcal{G}_{G_1, G_2} , où $G_i := (M_{ii}, \delta_{ii}^i, \varphi_{ii}, \psi_{ii})$ et sera appelé un groupoïde de co-liason.*

2.36 Definition. Deux groupes quantiques localement compacts H et G sont dits monoidalement équivalents s'il existe un groupoïde mesuré quantique \mathcal{G}_{G_1, G_2} tel que H (resp. G) soit isomorphe à G_1 (resp. G_2).

2.5 Régularité

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de groupoïde mesuré quantique semi-régulier. Dans le cas d'un groupoïde de liason \mathcal{G}_{G_1, G_2} , nous montrons que la semi-régularité (resp. régularité) des deux groupes quantiques G_1 et G_2 est équivalente à la semi-régularité (resp. régularité) de \mathcal{G}_{G_1, G_2} .

La notion de groupoïde régulier a été introduite dans le cas compact par [11] et généralisée au cadre des C^* -unitaires pseudo-multiplicatifs par [19, 20].

Notons que De Commer a donné un exemple [8] de groupoïde de liason \mathcal{G}_{G_1, G_2} où G_1 est régulier et G_2 semi-régulier (et non régulier).

Dans ce qui suit, on se fixe un groupoïde $\mathcal{G} = (N, M, \alpha, \beta, \delta, T, T', \epsilon)$ de base $N = \oplus_{l=1} M_{n_l}$ (cf. 2.7).

Dans l'appendice, nous avons donné la définition des opérateurs $R_\xi^\alpha, L_\xi^\beta \in B(H_\epsilon, H)$ associés à tout $\xi \in H$. Notons que l'espace vectoriel normiquement fermé $[R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \mid \xi, \eta \in H]$ (resp. $[L_\xi^\beta(L_\eta^\beta)^* \mid \xi, \eta \in H]$), est une sous-C*-algèbre de $\mathcal{K}(H)$, dont l'adhérence faible est $\alpha(N)'$ (resp. $\beta(N^o)'$).

2.37 Définition. Le groupoïde \mathcal{G} est dit semi-régulier (resp. régulier) si on a $[L_\xi^\beta(L_\eta^\beta)^* \mid \xi, \eta \in H] \subset \mathcal{C}(V)$, (resp. $[L_\xi^\beta(L_\eta^\beta)^* \mid \xi, \eta \in H] = \mathcal{C}(V)$).

Nous avons la caractérisation suivante de la semi-régularité (resp. régularité) :

2.38 Proposition. Il y a équivalence entre les conditions :

- a) Le groupoïde \mathcal{G} est semi-régulier (resp. régulier).
- b) $[L_\xi^{\widehat{\beta}}(L_\eta^{\widehat{\beta}})^* \mid \xi, \eta \in H] \subset S\widehat{S}$, (resp. $[L_\xi^{\widehat{\beta}}(L_\eta^{\widehat{\beta}})^* \mid \xi, \eta \in H] = S\widehat{S}$).
- c) Le groupoïde dual $\widehat{\mathcal{G}}$ est semi-régulier (resp. régulier).
- d) $[R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \mid \xi, \eta \in H] \subset \mathcal{C}(W)$, (resp. $[R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \mid \xi, \eta \in H] = \mathcal{C}(W)$).

Démonstration. L'équivalence des conditions a) et b) résulte (2.15) des égalités :

$$S\widehat{S} = UC(V)U^* \quad , \quad U[L_\xi^\beta(L_\eta^\beta)^* \mid \xi, \eta \in H]U^* = [L_\xi^{\widehat{\beta}}(L_\eta^{\widehat{\beta}})^* \mid \xi, \eta \in H]$$

Les C*-algèbres " S " et " \widehat{S} " correspondant au groupoïde $\widehat{\mathcal{G}}$, sont respectivement \widehat{S} et $R(S) = USU^*$. Par l'équivalence des conditions a) et b) appliquée au groupoïde $\widehat{\mathcal{G}}$, la semi-régularité (resp. régularité) de $\widehat{\mathcal{G}}$ est équivalente à :

$$[R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \mid \xi, \eta \in H] \subset R(S)\widehat{S} \quad , \quad (\text{resp. } [R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \mid \xi, \eta \in H] = R(S)\widehat{S})$$

Par ailleurs, on a $JS\widehat{S}J = R(S)\widehat{S} = \mathcal{C}(W)$ et $J[L_\xi^{\widehat{\beta}}(L_\eta^{\widehat{\beta}})^* \mid \xi, \eta \in H]J = [R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \mid \xi, \eta \in H]$, d'où l'équivalence des quatre conditions. \square

Pour étudier la (semi)-régularité d'un groupoïde de co-liaison \mathcal{G}_{G_1, G_2} associés à deux groupes quantiques l.c monoidalement équivalents, nous avons besoin du lemme qui va suivre, dont les notations sont les suivantes :

Soient H, K et L des espaces de Hilbert, $X : K \otimes H \rightarrow L \otimes H$ et $Y : H \otimes K \rightarrow H \otimes L$ des opérateurs bornés. Posons :

$$\mathcal{C}(X) := [\{(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma_{L \otimes H} X) \mid \omega \in B(H, L)_*\}], \quad \mathcal{C}(Y) := [\{(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma_{H \otimes L} Y) \mid \omega \in B(K, H)_*\}],$$

2.39 Lemme. Soient E, E' des espaces de Hilbert non nuls. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathcal{K}(H, L) \subset \mathcal{C}(Y)$ (resp. $\mathcal{K}(K, H) \subset \mathcal{C}(X)$)
- b) $\mathcal{K}(H \otimes E, E' \otimes L) \subset [(\mathcal{K}(H, E') \otimes 1_L)Y(1_H \otimes \mathcal{K}(E, K))]$
(resp. $\mathcal{K}(K \otimes E', E \otimes H) \subset [(\mathcal{K}(L, E) \otimes 1_H)X(1_K \otimes \mathcal{K}(E', H))]$)

Démonstration. On a par un calcul direct :

$$(1_L \otimes \theta_{e',\xi}) \Sigma_{H \otimes L} Y(1_H \otimes \theta_{\eta,e}) = (\text{id} \otimes \omega_{\xi,\eta})(\Sigma_{H \otimes L} Y) \otimes \theta_{e',e} \mid \xi \in H, \eta \in K, e \in E, e' \in E'$$

Il en résulte :

$$[(1_L \otimes \mathcal{K}(H, E')) \Sigma_{H \otimes L} Y(1_H \otimes \mathcal{K}(E, K))] = [\mathcal{C}(Y) \odot \mathcal{K}(E, E')] \subset B(H \otimes E, L \otimes E')$$

L'équivalence des conditions a) et b) est alors une conséquence de :

$$\Sigma_{L \otimes E'} (1_L \otimes \mathcal{K}(H, E')) \Sigma_{H \otimes L} = \mathcal{K}(H, E') \otimes 1_L$$

L'équivalence des conditions (resp.) s'obtient en appliquant l'équivalence des conditions a) et b) à

$$Y' := \Sigma_{K \otimes H} X^* \Sigma_{H \otimes L}, K' := L, L' := K$$

car on a $C(Y') = C(X)^*$. □

On va appliquer le lemme précédent aux opérateurs unitaires :

$$V_{rj}^i : H_{ij} \otimes H_{rj} \rightarrow H_{ir} \otimes H_{rj} \quad , \quad W_{ij}^k : H_{ij} \otimes H_{jk} \rightarrow H_{ij} \otimes H_{ik}$$

2.40 Corollaire. Soient $i, j, k, r = 1, 2$.

a) Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

- (i) $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj}) \subset \mathcal{C}(V_{rj}^i)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj}) = \mathcal{C}(V_{rj}^i)$)
- (ii) $\mathcal{K}(H_{ij} \otimes H_{ir}, H_{rj} \otimes H_{rj}) \subset [(\mathcal{K}(H_{ir}, H_{rj}) \otimes 1_{H_{rj}}) V_{rj}^i (1_{H_{ij}} \otimes \mathcal{K}(H_{ir}, H_{rj}))]$ (resp. $\mathcal{K}(H_{ij} \otimes H_{ir}, H_{rj} \otimes H_{rj}) = [(\mathcal{K}(H_{ir}, H_{rj}) \otimes 1_{H_{rj}}) V_{rj}^i (1_{H_{ij}} \otimes \mathcal{K}(H_{ir}, H_{rj}))]$)

b) Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

- (i) $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) \subset \mathcal{C}(W_{ij}^k)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) = \mathcal{C}(W_{ij}^k)$)
- (ii) $\mathcal{K}(H_{ij} \otimes H_{jk}, H_{ik} \otimes H_{ik}) \subset [(\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) \otimes 1_{H_{ik}}) W_{ij}^k (1_{H_{ij}} \otimes \mathcal{K}(H_{jk}))]$ (resp. $\mathcal{K}(H_{ij} \otimes H_{jk}, H_{ik} \otimes H_{ik}) = [(\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) \otimes 1_{H_{ik}}) W_{ij}^k (1_{H_{ij}} \otimes \mathcal{K}(H_{jk}))]$)

Démonstration. Pour le a), appliquer 2.39 avec $X := V_{rj}^i$, $H := H_{rj}$, $K := H_{ij}$, $L := H_{ir}$ et aussi $E' := H_{ir}$, $E := H_{rj}$.

Pour le b), appliquer 2.39 avec $Y := W_{ij}^k$, $H := H_{ij}$, $K := H_{jk}$, $L := H_{ik}$ et aussi $E' := H_{ik}$, $E := H_{jk}$. □

Par un calcul direct, on obtient :

2.41 Lemme. Pour tout $\omega \in B(H)_*$ et tout $i, j, k, r = 1, 2$, nous avons :

$$p_{ik}(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma W) p_{ij} = p_{ik}(\text{id} \otimes p_{jk} \omega p_{ij})(\Sigma_{ij \otimes ik} W_{ij}^k) p_{ij} \quad , \quad p_{ik}[R_\xi^\alpha (R_\eta^\alpha)^* \mid \xi, \eta \in H] p_{ij} = \mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik})$$

$$p_{rj}(\text{id} \otimes \omega)(\Sigma V) p_{ij} = p_{rj}(\text{id} \otimes p_{rj} \omega p_{ir})(\Sigma_{ir \otimes rj} V_{rj}^i) p_{ij} \quad , \quad p_{rj}[L_\xi^\beta (L_\eta^\beta)^* \mid \xi, \eta \in H] p_{ij} = \mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj})$$

2.42 Corollaire. Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

- a) \mathcal{G} est semi-régulier (resp. régulier)
- b) Pour tout i, j, r , on a : $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj}) \subset \mathcal{C}(V_{rj}^i)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj}) = \mathcal{C}(V_{rj}^i)$)
- c) Pour tout i, j, k , on a : $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) \subset \mathcal{C}(W_{ij}^k)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) = \mathcal{C}(W_{ij}^k)$)

Démonstration. Appliquer 2.38 et le lemme précédent. □

2.43 Lemme. Pour tout $i, j, r, s = 1, 2$, on a :

- a) $\mathcal{C}(V_{rj}^i)H_{ij} = H_{rj}$
- b) $\mathcal{C}(V_{rj}^i)^* = \mathcal{C}(V_{ij}^r)$, $[\mathcal{C}(V_{rj}^i)\mathcal{C}(V_{ij}^s)] = \mathcal{C}(V_{rj}^s)$.

Démonstration. Il résulte de l'égalité $S\widehat{S} = U\mathcal{C}(V)U^*$, qu'on a :

$$\mathcal{C}(V_{rj}^i) = [R(S)_{rj}E_{ri,\lambda}^j] \quad \text{avec} \quad R(S)_{rj} := R(S)p_{rj} \quad \text{et} \quad E_{ri,\lambda}^j = p_{rj}\lambda(\widehat{S})p_{ij}$$

On déduit alors de 2.15 qu'on a :

$$[L(S)_{ji}E_{ir}^j] = [E_{ir}^jL(S)_{jr}] \quad \text{avec} \quad L(S)_{ji} := Sp_{ji} \quad \text{et} \quad E_{ir}^j = p_{ji}\widehat{S}p_{jr}$$

En appliquant $\text{Ad}U$ à l'égalité précédente, on obtient $[R(S)_{ij}E_{ir,\lambda}^j] = [E_{ir,\lambda}^jR(S)_{rj}]$.

De (2.31 c) et d), il résulte alors :

$$\begin{aligned} - \mathcal{C}(V_{rj}^i)H_{ij} &= [R(S)_{rj}E_{ri,\lambda}^j]H_{ij} = H_{rj}, \text{ car } R(S)_{rj} \text{ est une sous-C*-algèbre non dégénérée de } B(H_{rj}). \\ - \mathcal{C}(V_{rj}^i)^* &= [R(S)_{rj}E_{ri,\lambda}^j]^* = [E_{ir,\lambda}^jR(S)_{rj}] = [R(S)_{ij}E_{ir,\lambda}^j] = \mathcal{C}(V_{ij}^r) \\ - \mathcal{C}(V_{rj}^i)\mathcal{C}(V_{ij}^s) &= [R(S)_{rj}E_{ri,\lambda}^j][R(S)_{ij}E_{is,\lambda}^j] = [R(S)_{rj}E_{ri,\lambda}^jR(S)_{ij}E_{is,\lambda}^j] \\ &= [R(S)_{rj}R(S)_{rj}E_{ri,\lambda}^jE_{is,\lambda}^j] = [R(S)_{rj}E_{rs,\lambda}^j] = \mathcal{C}(V_{rj}^s) \end{aligned}$$

□

2.44 Proposition. Pour $i, j = 1, 2$, il y a équivalence entre les conditions :

- a) $\mathcal{K}(H_{jj}) \subset \mathcal{C}(V_{jj}^j)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{jj}) = \mathcal{C}(V_{jj}^j)$)
- b) $\mathcal{K}(H_{jj}, H_{ij}) \subset \mathcal{C}(V_{ij}^j)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{jj}, H_{ij}) = \mathcal{C}(V_{ij}^j)$)
- c) Le groupe quantique G_j est semi-régulier, (resp. régulier).

Démonstration. l'implication $a) \implies b)$ résulte 2.43 de $\mathcal{C}(V_{ij}^j)H_{jj} = H_{ij}$ et de $\mathcal{C}(V_{ij}^j) = [\mathcal{C}(V_{ij}^j)\mathcal{C}(V_{jj}^j)]$.

l'implication $b) \implies a)$ résulte 2.43 de $\mathcal{C}(V_{ij}^j)^*H_{ij} = \mathcal{C}(V_{jj}^i)H_{ij} = H_{jj}$ et de $\mathcal{C}(V_{jj}^j) = [\mathcal{C}(V_{jj}^i)\mathcal{C}(V_{ij}^j)]$.

Le c) résulte de l'équivalence des conditions a) et b).

□

Le résultat principale de ce paragraphe est le suivant :

2.45 Théorème. Soit \mathcal{G}_{G_1, G_2} un groupoïde de co-liaison associé à deux groupes quantiques l.c G_1 et G_2 monoidalement équivalents. Alors il y a équivalence entre :

- a) G_1 et G_2 sont semi-réguliers, (resp. réguliers).
- b) Le groupoïde \mathcal{G}_{G_1, G_2} est semi-régulier, (resp. régulier).

Démonstration. l'implication $b) \implies a)$ résulte de 2.42.

Réciproquement, supposons que pour $j \in \{1, 2\}$, on a $\mathcal{K}(H_{jj}) \subset \mathcal{C}(V_{jj}^j)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{jj}) = \mathcal{C}(V_{jj}^j)$) et montrons (2.42 b)), que pour tout $i, r = 1, 2$, on a $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj}) \subset \mathcal{C}(V_{rj}^i)$, (resp. $\mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj}) = \mathcal{C}(V_{rj}^i)$).

Il résulte de 2.43 que pour tout $i, j, r = 1, 2$, on a : $\mathcal{C}(V_{rj}^i)H_{ij} = H_{rj}$. On en déduit :

$$\mathcal{C}(V_{rj}^j)H_{jj} = H_{rj} \quad , \quad \mathcal{C}(V_{ij}^j)H_{jj} = H_{ij}$$

Tout opérateur compact $k \in \mathcal{K}(H_{ij}, H_{rj})$ est alors de la forme :

$$k = t k' t'^* \quad ; \quad t \in \mathcal{C}(V_{rj}^j), k' \in \mathcal{K}(H_{jj}), t' \in \mathcal{C}(V_{ij}^j)$$

Mais, par 2.43, on a $[\mathcal{C}(V_{rj}^j)\mathcal{C}(V_{jj}^j)\mathcal{C}(V_{ij}^j)^*] = [\mathcal{C}(V_{rj}^j)\mathcal{C}(V_{jj}^j)\mathcal{C}(V_{jj}^i)] = \mathcal{C}(V_{rj}^i)$, d'où l'implication $a) \implies b)$.

□

2.46 Corollaire. Soit \mathcal{G}_{G_1, G_2} un groupoïde de co-liaison associé à deux groupes quantiques l.c G_1 et G_2 monoidalement équivalents. Alors G_1 et G_2 sont semi-réguliers (resp. (réguliers)) si et seulement si pour tout $i, j, k = 1, 2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(H_{ij} \otimes H_{jk}, H_{ik} \otimes H_{ik}) &\subset [(\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) \otimes 1_{H_{ik}}) W_{ij}^k(1_{H_{ij}} \otimes \mathcal{K}(H_{jk}))] \\ (\text{resp. } \mathcal{K}(H_{ij} \otimes H_{jk}, H_{ik} \otimes H_{ik}) &= [(\mathcal{K}(H_{ij}, H_{ik}) \otimes 1_{H_{ik}}) W_{ij}^k(1_{H_{ij}} \otimes \mathcal{K}(H_{jk}))]) \end{aligned}$$

C'est une conséquence de 2.40 , 2.42 et 2.45.

2.47 Remarques. Soient G_1 et G_2 sont deux groupes quantiques monoidalement équivalents

a) Nous verrons que l'inclusion :

$$\mathcal{K}(H_{21} \otimes H_{21}, H_{21} \otimes H_{11}) \subset [(1_{H_{21}} \otimes \mathcal{K}(H_{11}))(W_{21}^1)^*(\mathcal{K}(H_{21}) \otimes 1_{H_{21}})]$$

joue un rôle crucial pour établir, dans le cas régulier, l'équivalence des actions continues de G_1 et G_2 .

b) Le c) de 2.44, montre que l'égalité $\mathcal{K}(H_{22}, H_{12}) = \mathcal{C}(V_{12}^2)$ n'entraîne pas en général que G_1 est régulier, ce qui permet de répondre négativement à une question de [18].

3 Action continue d'un groupoïde quantique sur une base de dimension finie

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion d'action continue dans une C^* -algèbre, d'un groupoïde m.q de base une C^* -algèbre de dimension finie. Nous définissons le produit croisé correspondant, qu'on munit d'une action continue du groupoïde dual.

Dans le cas d'un groupoïde de co-liaison, nous montrons qu'une action continue d'un tel groupoïde, nous donne une action continue de chacun des groupes quantiques l.c sous-jacents. Généralisant le cas de l'action triviale [6], nous montrons que les produits croisés correspondants à ces actions de groupes quantiques, sont Morita équivalents.

Enfin, nous généralisons la bidualité de Takesaki-Takai pour les actions continues d'un groupoïde m.q régulier. Nous terminons ce paragraphe par une description utile pour la suite, du double produit croisé par une action d'un groupoïde de co-liaison.

3.1 Notation. On se fixe un groupoïde mesuré $\mathcal{G} = (N, M, \alpha, \beta, \delta, T, T', \epsilon)$ de base $N = \oplus_{l=1}^k M_{n_l}$ munie de la trace $\epsilon = \oplus_{l=1}^k n_l \text{Trace}_{M_{n_l}}$ et on reprend les notations de 2.2.

3.1 Action continue. Produit croisé

3.2 Definition. Soit A une C^* -algèbre. Une action continue du groupoïde m.q \mathcal{G} dans A est un couple (β_A, δ_A) où $\beta_A : N^o \rightarrow M(A)$ est un $*$ - morphisme non dégénéré , $\delta_A : A \rightarrow M(A \otimes S)$ un $*$ - morphisme injectif vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta_A(1) &= q_{\beta_A, \alpha} = \sum_l \frac{1}{n_l} \sum_{i,j=1}^{n_l} (\beta_A(e_{ji}^{l,o}) \otimes \alpha(e_{ij}^l)) \quad , \quad (\text{cf.5.14}) \\ \text{b) } (\delta_A \otimes \text{id}_S) \circ \delta_A &= (\text{id}_A \otimes \delta) \circ \delta_A \end{aligned}$$

- c) Pour tout $n \in N$, on a $\delta_A \circ \beta_A(n^o) = q_{\beta_A, \alpha}(1_A \otimes \beta(n^o))$.
d) $[\delta_A(A)(1_A \otimes S)] = q_{\beta_A, \alpha}(A \otimes S)$.

Une C*-algèbre A munie d'une action continue (β_A, δ_A) du groupoïde \mathcal{G} est appelée une \mathcal{G} -algèbre.

3.3 Remarque. la condition a) est équivalente à $q_{\beta_A, \alpha}(A \otimes S) = [\delta_A(A)(A \otimes S)]$. Elle entraîne que les *-homomorphismes $\delta_A \otimes \text{id}_S$ et $\text{id}_A \otimes \delta$, s'étendent de façon unique à $M(A \otimes S)$, en des *-homomorphismes strictement continus et vérifiant respectivement $(\delta_A \otimes \text{id}_S)(1_A) = q_{\beta_A, \alpha, 12}$ et $(\text{id}_A \otimes \delta)(1_A) = q_{\beta, \alpha, 23}$.

On a alors :

- $(\delta_A \otimes \text{id}_S)\delta_A(1_A) = (\text{id}_A \otimes \delta)\delta_A(1_A) = q_{\beta_A, \alpha, 12} q_{\beta, \alpha, 23} = q_{\beta, \alpha, 23} q_{\beta_A, \alpha, 12}$
- $\delta_A \circ \beta_A(n^o) = (1_A \otimes \beta(n^o))q_{\beta_A, \alpha} = (1_A \otimes \beta(n^o))\delta_A(1) \quad , \quad n \in N$
- $[(1_A \otimes S)\delta_A(A)] = (A \otimes S)q_{\beta_A, \alpha} = (A \otimes S)\delta_A(1)$

3.4 Exemples. a) L'action triviale du groupoïde \mathcal{G} . Il s'agit de l'action de \mathcal{G} dans la C*-algèbre $A := N^o$ définie par les *-morphisms :

$$\beta_{N^o} : N^o \rightarrow N^o : n^o \mapsto n^o, \delta_{N^o} : N^o \rightarrow M(N^o \otimes S) : x^o \mapsto 1_{N^o} \otimes \beta(x^o)$$

b) L'action du groupoïde \mathcal{G} dans lui même. On prend $A := S, \beta_A := \beta$ et $\delta_A := \delta$ le coproduit de S .

3.5 Definition. Soient (A, β_A, δ_A) et (B, β_B, δ_B) deux \mathcal{G} -algèbres. Un *-morphisme non dégénéré $f : A \rightarrow M(B)$ est dit \mathcal{G} -équivariant si et seulement si, on a :

$$(f \otimes \text{id}_S)\delta_A = \delta_B \circ f \quad , \quad f \circ \beta_A = \beta_B$$

3.6 Notation. On note $A^{\mathcal{G}}$ la catégorie dont les objets sont les \mathcal{G} -algèbres, et les morphismes sont les *-morphisms $f : A \rightarrow M(B)$ non dégénérés et \mathcal{G} -équivariants, i.e $f \circ \beta_A = \beta_B$ et $(f \otimes \text{id})\delta_A = \delta_B \circ f$

Fixons dans ce qui suit une action continue (β_A, δ_A) du groupoïde \mathcal{G} dans une C*-algèbre A . Comme conséquence de la condition (3.2 a)), on a facilement :

3.7 Lemme-Notation. La représentation de A dans le C*-module $A \otimes H$ définie par $\pi_L := (\text{id}_A \otimes L) \circ \delta_A$ se prolonge de façon unique en une représentation $\pi_L : M(A) \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes H)$ fidèle, continue pour les topologies stricte/topologie *-forte et vérifiant $\pi_L(1_A) = q_{\beta_A, \alpha}$.
De plus, on a $\forall m \in M(A)$, $\pi_L(m) = \pi_L(m)q_{\beta_A, \alpha} = q_{\beta_A, \alpha}\pi_L(m)$.

Introduisons le C*-module

$$\mathcal{E}_{A, L} = q_{\beta_A, \alpha}(A \otimes H) \tag{3.1}$$

Par restriction de π_L , on obtient une représentation unitale, fidèle et continue pour les topologies stricte/topologie*-forte :

$$\pi : M(A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A, L}) : m \mapsto \pi_L(m)|_{\mathcal{E}_{A, L}} \tag{3.2}$$

Pour tout $T \in M(\widehat{S})$, on a $[1_A \otimes T, q_{\beta_A, \alpha}] = 0$ (2.10 a)). On en déduit une représentation unitale continue pour les topologies stricte/topologie*-forte :

$$\widehat{\pi} : M(\widehat{S}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A, L}) : T \mapsto \widehat{\pi}(x) := (1_A \otimes T)|_{\mathcal{E}_{A, L}} \tag{3.3}$$

3.8 Definition. On appelle produit croisé de la C*-algèbre A par l'action (β_A, δ_A) du groupoïde mesuré \mathcal{G} , la sous-C*-algèbre notée $A \rtimes \mathcal{G}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{A, L})$ engendrée par les produits $\pi(a)\widehat{\pi}(x)$, $a \in A$ et $x \in \widehat{S}$.

3.9 Lemme. *Le produit croisé $A \rtimes \mathcal{G}$ est l'adhérence de l'espace vectoriel fermé engendré par les produits $\pi(a)\widehat{\theta}(x)$, $a \in A$ et $x \in \widehat{S}$.*

Démonstration. Soient $\omega \in B(H)_*$ et $a \in A$. Posons $x = (\text{id} \otimes \omega)(V)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} (1_A \otimes x)\pi_L(a) &= (\text{id}_A \otimes \text{id}_H \otimes \omega)(V_{23}\pi_L(a)_{12}) = (\text{id}_A \otimes \text{id}_H \otimes \omega)(V_{23}V_{23}^*V_{23}\pi_L(a)_{12}) \\ &= (\text{id}_A \otimes \text{id}_H \otimes \omega)(V_{23}\pi_L(a)_{12}V_{23}^*V_{23}) \quad (2.9c) \\ &= (\text{id}_A \otimes \text{id}_H \otimes \omega)[(\text{id}_A \otimes L \otimes L)(\text{id}_A \otimes \delta)(\delta(a))] = (\text{id}_A \otimes \text{id}_H \otimes \omega)[(\pi_L \otimes L)(\delta_A(a))] \end{aligned}$$

En posant $\omega = \omega' \cdot s$ avec $\omega' \in B(H)_*$ et $s \in S$, on obtient que $(1_A \otimes x)\pi_L(a)$ est limite normique de sommes finies $\sum_i \pi_L(a_i)(1_A \otimes x_i)$ avec $a_i \in A$ et $x_i \in \widehat{S}$. \square

Le résultat précédent montre clairement que π (resp. $\widehat{\theta}$), définit un *-morphisme $\pi : M(A) \rightarrow M(A \rtimes \mathcal{G})$ (resp. $\widehat{\theta} : M(\widehat{S}) \rightarrow M(A \rtimes \mathcal{G})$) unital et strictement continu.

Notons aussi qu'on a une unique représentation fidèle, continue pour les topologies stricte/topologie *-forte :

$$j_B : M(B) \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes H) \quad , \quad j_B(1_B) = q_{\beta_A, \alpha} \quad (3.4)$$

vérifiant :

$$(j_B \circ \pi)(m) = (\text{id}_A \otimes L)\delta_A(m) \quad , \quad m \in M(A) \quad ; \quad (j_B \circ \widehat{\theta})(T) = q_{\beta_A, \alpha}(1_A \otimes T) \quad , \quad T \in M(\widehat{S}) \quad (3.5)$$

On définit de même le produit croisé d'une C*-algèbre par une action continue du groupoïde mesuré dual $\widehat{\mathcal{G}}$ (cf. 2.11) .

3.10 Définition. Soit B une C*-algèbre. Une action continue du groupoïde mesuré dual $\widehat{\mathcal{G}}$ dans B , est un couple (α_B, δ_B) avec $\alpha_B : N \rightarrow M(B)$ un *-morphisme non dégénéré et $\delta_B : B \rightarrow M(B \otimes \widehat{S})$ est un *-morphisme injectif vérifiant :

- a) $\delta_B(1) = q_{\alpha_B, \beta} = \sum_l \frac{1}{n_l} \sum_{i,j=1}^{n_l} (\alpha_B(e_{ji}) \otimes \beta(e_{ij}^{l,o})) \quad , \quad (\text{cf. 5.14}).$
- b) $(\delta_B \otimes \text{id}_{\widehat{S}}) \circ \delta_B = (\text{id}_B \otimes \widehat{\delta}) \circ \delta_B.$
- c) Pour tout $n \in N$, on a $\delta_B \circ \alpha_B(n) = q_{\alpha_B, \beta}(1_B \otimes \widehat{\alpha}(n)).$
- d) $[\delta_B(B)(1_B \otimes \widehat{S})] = q_{\alpha_B, \beta}(B \otimes \widehat{S})$

Une C*-algèbre B munie d'une action continue (α_B, δ_B) du groupoïde $\widehat{\mathcal{G}}$ est appelée une $\widehat{\mathcal{G}}$ -algèbre.

La condition a) entraîne que les *-morphisms $\delta_B \otimes \text{id}_{\widehat{S}}$ et $\text{id}_B \otimes \widehat{\delta}$, s'étendent de façon unique à $M(B \otimes \widehat{S})$, en des *-morphisms strictement continus et vérifiant :

$$(\delta_B \otimes \text{id}_{\widehat{S}})(1_B) = q_{\alpha_B, \beta, 12} \quad , \quad (\text{id}_B \otimes \widehat{\delta})(1_B) = q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23}$$

Pour définir le produit croisé $C = B \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$, on introduit le C*-module

$$\mathcal{E}_{B, \lambda} := q_{\alpha_B, \widehat{\beta}}(B \otimes H) \quad (3.6)$$

Exactement comme dans le cas d'une action du groupoïde \mathcal{G} , on a :

- un *-morphisme $\widehat{\pi} : M(B) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{B, \lambda})$ unital, injectif et continu pour les topologies stricte/topologie *-forte vérifiant $\widehat{\pi}(m) = (\text{id}_B \otimes \lambda)\delta_B(m)|_{\mathcal{E}_{B, \lambda}}$.
- un *-morphisme $\theta : M(S) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{B, \lambda})$ unital et continu pour les topologies stricte/topologie *-forte vérifiant $\theta(T) = (\text{id}_B \otimes T)|_{\mathcal{E}_{B, \lambda}}$.

Comme dans le cas d'une action de \mathcal{G} , on a :

3.11 Proposition-Définition. *L'adhérence du sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{B, \lambda})$ engendré par les produits $\widehat{\pi}(b)\theta(x)$, $b \in B$ et $x \in S$, est une sous-C*-algèbre, qu'on appelle produit croisé de B par l'action de $\widehat{\mathcal{G}}$ et qu'on note $B \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$.*

3.2 Action duale

3.2.1 Cas d'une action continue du groupoïde \mathcal{G}

Soit (β_A, δ_A) une action continue du groupoïde \mathcal{G} dans une C^* -algèbre A .

Posons $B = A \rtimes \mathcal{G}$ et $\mathcal{E}_A := \mathcal{E}_{A,L}$. Remarquons (2.10 b)) qu'on a $[q_{\beta_A, \alpha, 12}, \tilde{V}_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(A \otimes H \otimes H)$. Soit $X \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H)$ l'isométrie partielle définie par

$$X := \tilde{V}_{23}|_{\mathcal{E}_A \otimes H}$$

On a (2.9 c)) :

$$X^*X = q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}, 23}|_{\mathcal{E}_A \otimes H} \quad , \quad XX^* = q_{\hat{\alpha}, \beta, 23}|_{\mathcal{E}_A \otimes H} = (\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})(q_{\hat{\alpha}, \beta}) \quad (3.7)$$

Soient $\delta_B : B \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H)$ et $\alpha_B : N \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$, les applications linéaires définies par :

$$\delta_B(b) = X(b \otimes 1_H)X^*, \quad b \in B \quad \text{et} \quad \alpha_B(n) = \hat{\theta}(\hat{\alpha}(n)) = 1_A \otimes \hat{\alpha}(n)|_{\mathcal{E}_A}, \quad n \in N$$

On a :

3.12 Proposition. *Le couple (α_B, δ_B) définit une action continue du groupoïde mesuré $\hat{\mathcal{G}}$ dans la C^* -algèbre $B = A \rtimes \mathcal{G}$.*

Démonstration. : Il est clair que $\alpha_B : N \rightarrow M(B)$ est un $*$ -morphisme et qu'on a $XX^* = q_{\alpha_B, \beta} = (\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})(q_{\hat{\alpha}, \beta})$.

Pour voir que δ_B est à valeurs dans $M(B \otimes \hat{S})$, considérons $M(B \otimes \hat{S})$ comme une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H)$. Pour tout $a \in A$ et tout $x \in \hat{S}$, on a (2.2 et 2.10 d)) :

$$X(\pi(a) \otimes 1_H)X^* = (\pi(a) \otimes 1_{\hat{S}})(\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})q_{\hat{\alpha}, \beta}, \quad X(\hat{\theta}(x) \otimes 1_H)X^* = (\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})\hat{\delta}(x)$$

Comme $X^*X = q_{\hat{\beta}, \hat{\alpha}, 23}|_{\mathcal{E}_A \otimes H}$, on a (2.10 b)) pour tout $a \in A$, $x \in \hat{S}$ et $b \in M(B)$:

$$[X^*X, b \otimes 1_H] = 0 \quad \text{et} \quad X(\pi(a)\hat{\theta}(x) \otimes 1_H)X^* = (\pi(a) \otimes 1_{\hat{S}})(\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})\hat{\delta}(x) \quad (3.8)$$

Il en résulte que $\delta_B : B \rightarrow M(B \otimes \hat{S})$ est un $*$ -morphisme et on a $\delta_B(1_B) = q_{\alpha_B, \beta}$.

Montrons qu'il est injectif. Soit $b \in B$ tel que $\delta_B(b) = 0$.

On a alors $X^*X(b \otimes 1_H)X^* = (b \otimes 1_H)X^*XX^* = (b \otimes 1_H)X^* = 0$. Il en résulte que pour tout $\omega \in B(H)_*$, on a $b(\text{id} \otimes \omega)(X^*) = 0$. Comme $[(\text{id} \otimes \omega)(X^*) | \omega \in B(H)_*] = (1_A \otimes R(S))|_{\mathcal{E}_A}$, on a $b = 0$.

Montrons la continuité de δ_B .

Pour $a \in A$ et $x, x' \in \hat{S}$, on a :

$$\delta_B(\pi(a)\hat{\theta}(x))(1_B \otimes x') = (\pi(a) \otimes 1_{\hat{S}})(\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})(\hat{\delta}(x)(1_{\hat{S}} \otimes x'))$$

donc $[\delta_B(B)(1_B \otimes \hat{S})] \subset \delta_B(1_B)(B \otimes \hat{S})$.

Pour montrer l'inclusion $\delta_B(1_B)(B \otimes \hat{S}) \subset [\delta_B(B)(1_B \otimes \hat{S})]$, remarquons qu'on a :

$$\begin{aligned} \delta_B(1_B)(B \otimes \hat{S}) &= \delta_B(1_B)[(\pi(a) \otimes 1_{\hat{S}})(\hat{\theta}(x) \otimes x') | a \in A ; x, x' \in \hat{S}] \\ &= [\delta_B(1_B)(\pi(a) \otimes 1_{\hat{S}})(\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})(q_{\hat{\alpha}, \beta}(x \otimes x')) | a \in A ; x, x' \in \hat{S}] \\ &= [\delta_B(1_B)(\pi(a) \otimes 1_{\hat{S}})(\hat{\theta} \otimes \text{id}_{\hat{S}})(\hat{\delta}(u)(1_{\hat{S}} \otimes u')) | a \in A ; u, u' \in \hat{S}] \quad (2.3) \\ &= [\delta_B(\pi(a)\hat{\theta}(u))(1_B \otimes u')) | a \in A, u, u' \in \hat{S}] = [\delta_B(B)(1_B \otimes \hat{S})] \end{aligned}$$

Montrons la coassociativité de δ_B .
 Pour tout $c \in M(B \otimes \widehat{S})$, on a :

$$(\delta_B \otimes \text{id}_{\widehat{S}})(c) = X_{12}c_{13}X_{12}^* \quad \text{et} \quad (\text{id}_B \otimes \widehat{\delta})(c) = \widetilde{V}_{23}c_{12}\widetilde{V}_{23}^*$$

La coassociativité de δ_B résulte de la relation pentagonale vérifiée par \widetilde{V} et des relations (cf. 2.10 b)) :

$$X_{12}X_{13} = \widetilde{V}_{23}X_{12}\widetilde{V}_{23}^* \quad \text{et} \quad [X_{12}, \widetilde{V}_{23}^*\widetilde{V}_{23}] = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H \otimes H)$$

Finalement, pour tout $n \in N$, on a 2.10 b)) :

$$\delta_B(\alpha_B(n)) = X(\widehat{\theta}(\widehat{\alpha}(n)) \otimes 1_H)X^* = (\widehat{\theta} \otimes \text{id}_{\widehat{S}})\widehat{\delta}(\widehat{\alpha}(n)) = \delta_B(1_B)(1_B \otimes \widehat{\alpha}(n)) \quad \square$$

3.13 Definition. On appelle action duale du groupoïde $\widehat{\mathcal{G}}$ dans le produit croisé $B = A \rtimes \mathcal{G}$, l'action définie par le couple (α_B, δ_B) .

3.2.2 Cas d'une action continue du groupoïde dual $\widehat{\mathcal{G}}$

Soit (α_B, δ_B) une action continue du groupoïde $\widehat{\mathcal{G}}$ dans une C^* -algèbre B .

Posons $C = B \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{E}_B := \mathcal{E}_{B,\lambda}$ (cf. 3.6). Remarquons (2.10 b)) qu'on a $[q_{\alpha_B, \widehat{\beta}, 12}, V_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(B \otimes H \otimes H)$. Soit $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_B \otimes H)$ l'isométrie partielle définie par

$$Y := V_{23}|_{\mathcal{E}_B \otimes H}$$

On a (2.9 c)) :

$$Y^*Y = q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23}|_{\mathcal{E}_B \otimes H} \quad , \quad YY^* = q_{\beta, \alpha, 23}|_{\mathcal{E}_B \otimes H} = (\theta \otimes \text{id}_S)q_{\beta, \alpha} \quad (3.9)$$

Soient $\delta_C : C \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_B \otimes H)$ et $\beta_C : N^o \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_B)$, les applications linéaires définies par :

$$\delta_C(c) = Y(c \otimes 1_H)Y^*, \quad c \in C \quad \text{et} \quad \beta_C(n^o) = \theta(\beta(n^o)) = 1_B \otimes \beta(n^o)|_{\mathcal{E}_B}, \quad n \in N$$

Comme dans le cas d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} , on établit les formules :

$$\begin{aligned} Y(\widehat{\pi}(b) \otimes 1_H)Y^* &= (\widehat{\pi}(b) \otimes 1_S)(\theta \otimes \text{id}_S)q_{\beta, \alpha}, \quad Y(\theta(s) \otimes 1_H)Y^* = (\theta \otimes \text{id}_S)\delta(s), \quad b \in B, \quad s \in S \\ [Y^*Y, c \otimes 1_H] &= 0 \quad , \quad Y(\widehat{\pi}(b)\theta(s) \otimes 1_H)Y^* = (\widehat{\pi}(b) \otimes 1_S)(\theta \otimes \text{id}_S)\delta(s), \quad c \in M(C), \quad b \in B, \quad s \in S \quad (3.10) \\ Y_{12}Y_{13} &= V_{23}Y_{12}V_{23}^* \quad \text{et} \quad [Y_{12}, V_{23}^*V_{23}] = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}_B \otimes H \otimes H) \end{aligned}$$

Il en résulte qu'on a :

3.14 Proposition. Le couple (β_C, δ_C) définit une action continue du groupoïde mesuré \mathcal{G} dans la C^* -algèbre $C = B \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ qu'on appelle l'action duale de l'action (α_B, δ_B) .

3.2.3 Action continue d'un groupoïde de co-liaison

Soient G_1 et G_2 deux groupes quantiques l.c monoidalement équivalents. Dans ce qui suit, on se fixe un groupoïde de co-liaison $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{G_1, G_2} = (\mathbf{C}^2, M, \alpha, \beta, \delta, T, T', \varepsilon)$, dont les coins sont identifiés aux groupes quantiques G_1 et G_2 .

Pour étudier les actions continues de ce groupoïde, nous reprenons pour \mathcal{G} , les notations du paragraphe 2.4 et nous identifions les C^* -algèbres $M(S_{ij})$, (resp. $M(S_{ij} \otimes S_{kl})$) et $p_{ij}M(S) \subset B(H)$, (resp. $(p_{ij} \otimes p_{kl})M(S \otimes S) \subset B(H \otimes H)$).

Soit A une C^* -algèbre. Nous allons commencer par donner une description équivalente d'une action continue (β_A, δ_A) du groupoïde \mathcal{G} , en termes d'actions continues des groupes quantiques G_1 et G_2 .

On rappelle que $\beta_A : \mathbf{C}^2 \rightarrow M(A)$ est un $*$ -morphisme unital et $\delta_A : A \rightarrow M(A \otimes S)$ un $*$ -morphisme injectif vérifiant les conditions 3.2.

Remarquons d'abord que le $*$ -morphisme $\beta_A : \mathbf{C}^2 \rightarrow M(A)$ est à valeurs dans le centre de $M(A)$. En effet, pour tout $n \in \mathbf{C}^2$, $x \in A$, on a :

$$\delta_A(\beta_A(n)x) = \delta_A(1_A)(1_A \otimes \beta(n))\delta_A(x) = \delta_A(x)\delta_A(1_A)(1_A \otimes \beta(n)) = \delta_A(x\beta_A(n)) \quad (3.11)$$

Par injectivité de δ_A , on déduit $[\beta_A(n), x] = 0$.

3.15 Notations. *Posons :*

- a) $q_j := \beta_A(\varepsilon_j)$, $A_j = q_j A$. Il est clair que A_1 et A_2 sont des idéaux bilatères fermés de la C^* -algèbre A et on a $A = A_1 \oplus A_2$.
- b) Pour $j, k = 1, 2$, notons $\pi_j^k : M(A_k \otimes S_{kj}) \rightarrow M(A \otimes S)$ le prolongement strictement continu de l'injection canonique $A_k \otimes S_{kj} \rightarrow A \otimes S$ vérifiant $\pi_j^k(1_{A_k \otimes S_{kj}}) = q_k \otimes p_{kj}$.

Par définition 2.6 du projecteur $q_{\beta, \alpha}$, on a pour $j = 1, 2$:

$$q_{\beta_A, \alpha} = q_1 \otimes \alpha(\varepsilon_1) + q_2 \otimes \alpha(\varepsilon_2) \quad (3.12)$$

On déduit alors de (3.2 c)) que pour $j = 1, 2$, on a :

$$\delta_A(q_j) = \sum_k q_k \otimes p_{kj} \quad (3.13)$$

Par un calcul direct, on obtient facilement :

3.16 Lemme. *Pour tout $a \in A$ et $j, k = 1, 2$, on a*

$$(q_k \otimes 1_S)\delta_A(q_j a) = (1_A \otimes \alpha(\varepsilon_k))\delta_A(q_j a) = (q_k \otimes p_{kj})\delta_A(a)$$

3.17 Proposition. *Pour $j, k = 1, 2$, il existe un unique $*$ -morphisme injectif et non dégénéré :*

$$\delta_{A_j}^k : A_j \rightarrow M(A_k \otimes S_{kj})$$

vérifiant $\pi_j^k \circ \delta_{A_j}^k(x) = (q_k \otimes 1_S)\delta_A(x) = (1_A \otimes \alpha(\varepsilon_k))\delta_A(x) = (q_k \otimes p_{kj})\delta_A(x)$, $x \in A_j$.

De plus, nous avons :

$$a) \text{ Pour tout } a \in A, \text{ on a } \delta_A(a) = \sum_{k,j} \pi_j^k \circ \delta_{A_j}^k(aq_j)$$

$$b) \text{ Pour tout } j, k, l = 1, 2, \text{ on a } (\delta_{A_k}^l \otimes \text{id}_{S_{kj}})\delta_{A_j}^k = (\text{id}_{A_l} \otimes \delta_{l_j}^k)\delta_{A_j}^l$$

$$c) [\delta_{A_j}^k(A_j)(1_{A_k} \otimes S_{kj})] = A_k \otimes S_{kj} \text{ , en particulier on a :}$$

$$M(\delta_{A_j}^k(A_j)) \subset M(A_k \otimes S_{kj}) \text{ , } A_k = [(\text{id}_{A_k} \otimes \omega)\delta_{A_j}^k(A_j) \mid \omega \in B(H_{kj})_*]$$

$$d) \delta_{A_i}^i : A_i \rightarrow M(A_i \otimes S_{ii}) \text{ est une action continue du groupe quantique } G_i \text{ dans la } C^*\text{-algèbre } A_i.$$

Démonstration. On a $\text{Im}(\pi_j^k) = (q_k \otimes p_{kj})M(A \otimes S)$. Par ailleurs, pour tout $x \in A_j$, on a

$$\delta_A(x) = \delta_A(q_j x) = \sum_k (q_k \otimes p_{kj})\delta_A(x)$$

d'où l'existence des $*$ -morphisms $\delta_{A_j}^k$, qui vérifient :

$$\pi_j^k \circ \delta_{A_j}^k(x) = (q_k \otimes p_{kj})\delta_A(x) , \quad x \in A_j$$

Le a) résulte de l'égalité $A = A_1 \oplus A_2$. Par ailleurs, pour $j, k, l = 1, 2$, nous avons :

$$(\pi_k^l \otimes \text{id}_{S_{kj}})(\delta_{A_k}^l \otimes \text{id}_{S_{kj}})(T) = (q_l \otimes p_{lk} \otimes p_{kj})(\delta_A \otimes \text{id}_S)(\pi_j^k(T)) \quad , \quad T \in M(A_k \otimes S_{kj})$$

$$(\pi_k^l \otimes \text{id}_{S_{kj}})(\text{id}_{A_l} \otimes \delta_{l_j}^k)(T) = (q_l \otimes p_{lk} \otimes p_{kj})(\text{id}_A \otimes \delta)(\pi_j^l(T)) \quad , \quad T \in M(A_l \otimes S_{lj})$$

Le b) résulte alors de ces deux relations et de la coassociativité de δ_A . Notons que le b) entraîne l'injectivité des $*$ -morphisms $\delta_{A_j}^k$.

Le c) se déduit de la condition de continuité (3.2 d)) de la coaction δ_A . Le d) est une conséquence de b) et de c). \square

3.18 Corollaire. *Pour $j, k = 1, 2$ avec $j \neq k$, nous avons :*

- a) *Pour tout $x \in \delta_{A_j}^k(A_j)$, on a $(\text{id}_{A_k} \otimes \delta_{kj}^j)(x) \in M(\delta_{A_j}^k(A_j) \otimes S_{jj})$.*
- b) *$\delta_{A_j}^k(A_j) \rightarrow M(\delta_{A_j}^k(A_j) \otimes S_{jj}) : x \mapsto (\text{id}_{A_k} \otimes \delta_{kj}^j)(x)$ est une action continue du groupe quantique G_j dans la C^* -algèbre $\delta_{A_j}^k(A_j)$.*
- c) *$A_j \rightarrow \delta_{A_j}^k(A_j) : x \mapsto \delta_{A_j}^k(x)$ est un $*$ -isomorphisme G_j -équivariant.*

Démonstration. Les assertions du corollaire sont des conséquences de (3.17 b), c) et d)) faciles à établir. \square

3.19 Remarques. a) Dans le cas 3.4 de l'action triviale, les C^* -algèbres A_j s'identifient à \mathbb{C} et le d) de 3.17, correspond à l'action triviale de G_1 et G_2 .

b) Dans le cas 3.4 de l'action du groupoïde \mathcal{G} dans lui même. On a

$$A_1 = S_{11} \oplus S_{21} \quad , \quad A_2 = S_{12} \oplus S_{22} \quad , \quad \delta_{A_j}^k = \delta_{1j}^k \oplus \delta_{2j}^k$$

c) Dans le cas où les groupes quantiques G_1 et G_2 sont réguliers, nous verrons (4.11) que la G_j -algèbre $\delta_{A_j}^k(A_j)$ peut être obtenue directement à partir de la G_k -algèbre A_k , dont elle est en fait une déformation.

De cette description concrète d'une action continue (A, β_A, δ_A) du groupoïde \mathcal{G} en fonction des $*$ -morphisms $\delta_{A_j}^k$, on déduit une définition pratique des $*$ -morphisms \mathcal{G} -équivariants.

3.20 Lemme. *Soient (A, β_A, δ_A) et (B, β_B, δ_B) deux \mathcal{G} -algèbres. Pour $k = 1, 2$, posons $q_k := \beta_A(\varepsilon_k)$ et soit $\iota_k : M(B_k) \rightarrow M(B)$ le prolongement strictement continu de l'inclusion $B_k \subset B$.*

a) *Si $f : A \rightarrow M(B)$ est un $*$ -morphisme (3.5) \mathcal{G} -équivariant, alors pour tout $j = 1, 2$, il existe un unique $*$ -morphisme non dégénéré $f_j : A_j \rightarrow M(B_j)$ vérifiant :*

$$(f_k \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \circ \delta_{A_j}^k = \delta_{B_j}^k \circ f_j \quad , \quad k, j = 1, 2 \quad (3.14)$$

De plus, pour tout $a \in A$, nous avons $f(a) = \sum_j \iota_j \circ f_j(aq_j)$.

b) *Réciproquement, si pour $j = 1, 2$, nous avons un $*$ -morphisme non dégénéré $f_j : A_j \rightarrow M(B_j)$ vérifiant 3.14, alors le $*$ -morphisme non dégénéré $f : A \rightarrow M(B) : a \mapsto f(a) = \sum_j \iota_j \circ f_j(aq_j)$ est \mathcal{G} -équivariant.*

Démonstration. De la deuxième condition de la \mathcal{G} -équivariance de f , il résulte que $f(\beta_A(\varepsilon_j)) = \beta_B(\varepsilon_j)$, donc $f(A_j) \subset \beta_B(\varepsilon_j)M(B) = \iota_j(M(B_j))$, d'où l'existence des $*$ -morphisms non dégénérés $f_j : A_j \rightarrow M(B_j)$.

Le a) se déduit aisément de la première condition de la \mathcal{G} -équivariance de f . Le b) est facile à vérifier. \square

3.21 Corollaire. *les deux correspondances :*

$$A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_i} : (A, \beta_A, \delta_A) \mapsto (A_i, \delta_{A_i}^i) \quad , \quad i = 1, 2$$

sont fonctorielles.

Démonstration. Il est clair que si $f : (A, \beta_A, \delta_A) \rightarrow (B, \beta_B, \delta_B)$ est un $*$ -morphisme \mathcal{G} -équivariant, alors $f_i : (A_i, \delta_{A_i}^i) \rightarrow (B_i, \delta_{B_i}^i)$ est G_i -équivariant. \square

Pour montrer que dans le cas où G_1 et G_2 sont réguliers, les deux correspondances $A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_i} : (A, \beta_A, \delta_A) \mapsto (A_i, \delta_{A_i}^i)$ sont biunivoques, nous aurons besoin d'une réciproque de 3.17 :

3.22 Lemme. *Soient A_1 et A_2 deux C^* -algèbres munies de :*

$$\delta_{A_j}^k : A_j \rightarrow M(A_k \otimes S_{kj}) \quad , \quad j, k = 1, 2$$

des $$ -morphisms injectifs vérifiant les conditions (3.17 b) et c)).*

Posons $A := A_1 \oplus A_2$ et avec les notations de 3.15, définissons les $$ -morphisms :*

$$\delta_A : A \rightarrow M(A \otimes S) : a = (a_1, a_2) \mapsto \delta_A(a) := \sum_{k,j} \pi_j^k \delta_{A_j}^k(a_j) \quad , \quad \beta_A : \mathbb{C}^2 \rightarrow M(A) : (\lambda, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Alors (β_A, δ_A) est une action continue du groupoïde \mathcal{G} dans la C^ -algèbre $A = A_1 \oplus A_2$.*

.

\square

Equivalence de Morita des produits croisés des C^* -algèbres $A_1 \rtimes G_1$ et $A_2 \rtimes G_2$

Soit (A, β_A, δ_A) une action continue du groupoïde $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{G_1, G_2}$. Avec les notations de 3.17, nous allons montrer que les produits croisés $A_1 \rtimes G_1$ et $A_2 \rtimes G_2$ sont Morita équivalents.

Commençons par expliciter le produit croisé (cf. 3.9) $A \rtimes \mathcal{G}$.

On a

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_{A,L} = (q_1 \otimes \alpha(\varepsilon_1) + q_2 \otimes \alpha(\varepsilon_2))(A \otimes H) = \mathcal{E}_{A,1} \oplus \mathcal{E}_{A,2}$$

avec $\mathcal{E}_{A,k} = A_k \otimes \alpha(\varepsilon_k)H = A_k \otimes H_{k,1} \oplus A_k \otimes H_{k,2}$, $k = 1, 2$.

Posons $B = A \rtimes \mathcal{G} \subset \mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$. On rappelle qu'on a $B = [\pi(a)\hat{\theta}(x) \mid a \in A, x \in \hat{S}]$ où

$$\pi : M(A) \rightarrow M(B) : m \mapsto (\text{id} \otimes L)\delta_A(m)|_{\mathcal{E}_A} \quad , \quad \hat{\theta} : M(\hat{S}) \rightarrow M(B) : T \mapsto (1_A \otimes T)|_{\mathcal{E}_A}$$

Il est clair que l'application $a \mapsto \pi(a)|_{\mathcal{E}_{A,k}}$ définit une représentation fidèle $\pi_k : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,k})$ de la C^* -algèbre A et on a pour tout $a \in A$:

$$\pi_k(a) = \begin{pmatrix} (\text{id}_{A_k} \otimes L_{k1})\delta_{A_1}^k(aq_1) & 0 \\ 0 & (\text{id}_{A_k} \otimes L_{k2})\delta_{A_2}^k(aq_2) \end{pmatrix}$$

De même, pour $k = 1, 2$, on a une représentation fidèle $\widehat{\theta}_k : \widehat{S} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,k}) : x \mapsto x \mapsto (1_A \otimes \rho(x))|_{\mathcal{E}_{A,k}}$ de la C*-algèbre \widehat{S} et pour tout $x \in \widehat{S}$, on a :

$$\widehat{\theta}_k(x) = \begin{pmatrix} 1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{11}) & 1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{12}) \\ 1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{21}) & 1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{22}) \end{pmatrix} \quad , \quad x_{ij} := \beta(\varepsilon_i)x\beta(\varepsilon_j) \quad , \quad \widehat{\pi}_k(x_{ij}) := p_{ki}xp_{kj}$$

Notons π_B la représentation du produit croisé $B = A \rtimes \widehat{S}$ définie par l'inclusion $B \subset \mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$.

Par restriction de π_B au sous C*-module $\mathcal{E}_{A,k}$, on obtient pour tout $k = 1, 2$, une représentation $\pi_{B,k} : B \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,k})$. Pour tout $a \in A, x \in \widehat{S}$, posons $b = \pi(a)\widehat{\theta}(x)$. On a :

$$\pi_{B,k}(b) = \pi_k(a)\widehat{\theta}_k(x) = \begin{pmatrix} (\text{id}_{A_k} \otimes L_{k1})\delta_{A_1}^k(aq_1)(1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{11})) & (\text{id}_{A_k} \otimes L_{k1})\delta_{A_1}^k(aq_1)(1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{12})) \\ (\text{id}_{A_k} \otimes L_{k2})\delta_{A_2}^k(aq_2)(1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{21})) & (\text{id}_{A_k} \otimes L_{k2})\delta_{A_2}^k(aq_2)(1_{A_k} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{22})) \end{pmatrix}$$

Pour tout $i, j, k = 1, 2$, posons

$$\mathcal{E}_{jk}^i := [\{\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jk}) \mid a \in A, x \in \widehat{S}\}] \subset \mathcal{L}(A_i \otimes H_{ik}, A_i \otimes H_{ij}) \quad (3.15)$$

Remarquons que pour tout i , on a $\mathcal{E}_{ii}^i = A_i \rtimes_{\delta_{A,i}} G_i$.

3.23 Théorème. *Pour tout $i, j, k, l = 1, 2$, nous avons :*

$$\mathcal{E}_{jl}^i(A_i \otimes H_{il}) = A_i \otimes H_{ij} \quad , \quad [\mathcal{E}_{jk}^i \circ \mathcal{E}_{kl}^i] = \mathcal{E}_{jl}^i \quad , \quad (\mathcal{E}_{jl}^i)^* = \mathcal{E}_{lj}^i$$

En particulier :

$$[\mathcal{E}_{jk}^i \circ (\mathcal{E}_{jk}^i)^*] = \mathcal{E}_{jj}^i \quad , \quad [(\mathcal{E}_{jk}^i)^* \circ (\mathcal{E}_{jk}^i)] = \mathcal{E}_{kk}^i$$

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

3.24 Lemme. *Pour tout $i, j, k = 1, 2$, notons ι_{jk}^i l'injection canonique définie par la composition :*

$$\mathcal{L}(A_i \otimes H_{ik}, A_i \otimes H_{ij}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,i}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$$

Pour tout $a \in A$ et tout $x \in \widehat{S}$, on a :

$$\iota_{jk}^i(\widehat{\theta}_i(x_{jk})\pi_i(aq_k)) = (q_i \otimes p_{ij})\widehat{\theta}(x)\pi(a)(q_i \otimes p_{ik}) \quad , \quad \iota_{jk}^i(\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jk})) = (q_i \otimes p_{ij})\pi(a)\widehat{\theta}(x)(q_i \otimes p_{ik})$$

Un calcul direct permet d'établir ce lemme.

Démonstration du théorème. Montrons l'inclusion $(\mathcal{E}_{jl}^i)^* \subset \mathcal{E}_{lj}^i$.

Soient $a \in A$ et $x \in \widehat{S}$. On a $(\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jl}))^* = \widehat{\theta}_i(x_{lj}^*)\pi_i(a^*q_j)$ Posons $\widehat{\theta}(x^*)\pi(a^*) = \lim \sum_{\text{finie}} \pi(a_s)\widehat{\theta}(x_s)$

avec $a_s \in A$ et $x_s \in \widehat{S}$. Il résulte de 3.24 qu'on a :

$$\widehat{\theta}_i(x_{lj}^*)\pi_i(a^*q_j) = \lim \sum_{\text{finie}} \pi_i(a_s q_l)\widehat{\theta}_i(x_{lj,s})$$

d'où l'inclusion $(\mathcal{E}_{jl}^i)^* \subset \mathcal{E}_{lj}^i$ et finalement l'égalité.

L'inclusion $[\mathcal{E}_{jk}^i \circ \mathcal{E}_{kl}^i] \subset \mathcal{E}_{jl}^i$ résulte de l'égalité $(\mathcal{E}_{kj}^i)^* = \mathcal{E}_{jk}^i$.

Soient $a \in A$ et $x \in \widehat{S}$, montrons que $\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jl}) \in [\mathcal{E}_{jk}^i \circ \mathcal{E}_{kl}^i]$.

Posons $a = a_1 a_2$ avec $a_i \in A$. D'après (2.31 d)), on peut supposer que $\widehat{\theta}_i(x_{jl}) = \widehat{\theta}_i(y_{jk})\widehat{\theta}_i(z_{kl})$ avec $y, z \in \widehat{S}$.

On a alors $\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jl}) = \pi_i(a_1 q_j)\pi_i(a_2 q_j)\widehat{\theta}_i(y_{jk})\widehat{\theta}_i(z_{kl})$.

Comme $\pi_i(a_2 q_j)\widehat{\theta}_i(y_{jk}) \in \mathcal{E}_{jk}^i = (\mathcal{E}_{kj}^i)^*$, on a $\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jl}) \in [\mathcal{E}_{jk}^i \circ \mathcal{E}_{kl}^i]$.

L'égalité $[\mathcal{E}_{jl}^i(A_i \otimes H_{il})] = A_i \otimes H_{ij}$ résulte de (3.17 c)) et de l'égalité $[E_{jl}^i H_{il}] = H_{ij}$ □

3.25 Corollaire. \mathcal{E}_{jj}^i est une C^* -algèbre et \mathcal{E}_{ij}^i est une équivalence de Morita entre les C^* -algèbres $\mathcal{E}_{ii}^i = A_i \rtimes_{\delta_{A,i}} G_i$ et \mathcal{E}_{ij}^i .

Démonstration. On déduit du théorème que \mathcal{E}_{jj}^i est une C^* -algèbre qui agit de façon non dégénérée dans le A_i - C^* -module $A_i \otimes H_{ij}$ et on peut considérer $M(\mathcal{E}_{jj}^i)$ comme une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(A_i \otimes H_{ij}) = M(A_i \otimes \mathcal{K}(H_{ij}))$.
Il est clair que \mathcal{E}_{ij}^i , muni de l'action à droite de \mathcal{E}_{jj}^i et du produit scalaire $\langle \xi, \eta \rangle := \xi^* \eta$ est un C^* -module plein et on a $\mathcal{E}_{ii}^i = A_i \rtimes_{\delta_{A,i}} G_i \simeq \mathcal{K}(\mathcal{E}_{ij}^i)$. \square

3.26 Proposition. On a un $*$ -isomorphisme $\mu_{ji} : \mathcal{E}_{jj}^i \rightarrow \mathcal{E}_{jj}^j$ vérifiant tout $x \in \mathcal{E}_{jj}^i$:

$$(\delta_{A_i}^j \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{ij})})(x) = (W_{ji,23}^j)^* \mu_{ji}(x)_{13} W_{ji,23}^j$$

De plus, pour tout $a \in A$ et $x \in \widehat{S}$, on a $\mu_{ji}(\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jj})) = \pi_j(aq_j)\widehat{\theta}_j(x_{jj})$.

Pour établir cette proposition, on va d'abord prouver le lemme suivant :

3.27 Lemme. Pour tout $i, j, k = 1, 2$, on a :

- a) $(W_{ik,12}^j)^* V_{jj,23}^i = V_{jj,23}^k (W_{ik,12}^j)^*$
- b) Pour tout $x \in \widehat{S}$, on a $(W_{ik}^j)^* (1_{H_{ik}} \otimes \widehat{\pi}_i(x_{jj})) W_{ik}^j = 1_{H_{ik}} \otimes \widehat{\pi}_k(x_{jj})$
- c) Pour tout $a \in A$, on a $(\delta_{A_i}^j \otimes \text{id}_{S_{ij}})(\delta_{A_j}^i(aq_j)) = (W_{ji,23}^j)^* \delta_{A_j}^j(aq_j)_{13} W_{ji,23}^j$

Démonstration. Le a) résulte de (2.25 b)). Pour $\omega \in B(H)_*$, posons $x = (\text{id} \otimes \omega)(V)$. on a :

$$\widehat{\pi}_i(x_{jj}) = (\text{id} \otimes p_{jj}\omega p_{jj})(V_{jj}^i) \quad , \quad \widehat{\pi}_k(x_{jj}) = (\text{id} \otimes p_{jj}\omega p_{jj})(V_{jj}^k)$$

Le b) est donc une conséquence du a). Le c) résulte de (2.27 b)) et (3.17 b)). \square

Démonstration de la proposition. Soient $a \in A$ et $x \in \widehat{S}$, posons $u = \pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jj}) \in \mathcal{E}_{jj}^i$. Nous avons :

$$\begin{aligned} (\delta_{A_i}^j \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{ij})})(u) &= (\text{id}_{A_j} \otimes \delta_{jj}^i)(\pi_j(aq_j))(1_{A_j} \otimes 1_{H_{ji}} \otimes \widehat{\pi}_i(x_{jj})) \\ &= W_{ji,23}^j^* \pi_j(aq_j)_{13} W_{ji,23}^j (1_{A_j} \otimes 1_{H_{ji}} \otimes \widehat{\pi}_i(x_{jj})) = W_{ji,23}^j^* (\pi_j(aq_j)\widehat{\theta}_j(x_{jj}))_{13} W_{ji,23}^j \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de l'isomorphisme $\mu_{ji} : \mathcal{E}_{jj}^i \rightarrow \mathcal{E}_{jj}^j$ et la relation

$$\mu_{ji}(\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jj})) = \pi_j(aq_j)\widehat{\theta}_j(x_{jj}) \quad ; \quad a \in A, x \in \widehat{S}$$

\square

3.28 Corollaire. Les C^* -algèbres $A_1 \rtimes_{\delta_{A_1}^1} G_1$ et $A_2 \rtimes_{\delta_{A_2}^2} G_2$ sont Morita équivalentes.

\square

Pour tout $x \in \mathcal{E}_{jj}^i$, posons :

$$\delta_{\mathcal{E}_{jj}^i}(x) = \widetilde{V}_{ij,23}^j(x \otimes 1_{H_{ji}})(\widetilde{V}_{ij,23}^j)^* \quad (3.16)$$

$\delta_{\mathcal{E}_{jj}^i}$ est la restriction de la coaction duale du système dynamique (A, β_A, δ_A) à la C^* -algèbre \mathcal{E}_{jj}^i . elle définit une action continue du groupe quantique $\widehat{G_j}$ dans la C^* -algèbre \mathcal{E}_{jj}^i .

3.29 Proposition. *L'isomorphisme $\mu_{ji} : (\mathcal{E}_{jj}^i, \delta_{\mathcal{E}_{jj}^i}) \rightarrow (\mathcal{E}_{jj}^j, \delta_{\mathcal{E}_{jj}^j})$ est \widehat{G}_j - équivariant.*

Démonstration. Posons $u = \pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jj})$. En utilisant (2.25 b)) et (2.31 b)), on obtient :

$$\widetilde{V}_{ij,23}^j(\pi_i(aq_j)\widehat{\theta}_i(x_{jj}) \otimes 1_{H_{ji}})(\widetilde{V}_{ij,23}^j)^* = (\pi_i(aq_j) \otimes 1_{H_{jj}})(\widehat{\theta}_i \otimes \text{id}_{\widehat{S}_{jj}})\widehat{\delta}(x_{jj})$$

En réutilisant (2.25 b)) et (2.31 b)), on déduit :

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_{jj,23}^j(\mu_{ji}(u) \otimes 1_{H_{jj}})(\widetilde{V}_{jj,23}^j)^* &= \widetilde{V}_{jj,23}^j(\pi_j(aq_j)\widehat{\theta}_j(x_{jj}) \otimes 1_{H_{jj}})(\widetilde{V}_{jj,23}^j)^* \\ &= (\pi_j(aq_j) \otimes 1_{H_{jj}})(\widehat{\theta}_j \otimes \text{id}_{\widehat{S}_{jj}})\widehat{\delta}(x_{jj}) \\ &= (\mu_{ji} \otimes \text{id}_{\widehat{S}_{jj}})((\pi_i(aq_j) \otimes 1_{H_{jj}})(\widehat{\theta}_i \otimes \text{id}_{\widehat{S}_{jj}})\widehat{\delta}(x_{jj})) = (\mu_{ji} \otimes \text{id}_{\widehat{S}_{jj}})\delta_{\mathcal{E}_{jj}^i}(u) \end{aligned}$$

□

3.30 Remarques. a) Le corollaire 3.28 a été établi (avec des notations et des conventions différentes) dans [6] dans le cas de l'action triviale du groupoïde \mathcal{G} dans la C^* -algèbre $A := N^o = \mathbb{C}^2$.
Notons que pour cette action, les C^* -algèbres A_j s'identifient à \mathbb{C} , les $*$ -morphisms $\delta_{A_j}^k : \mathbb{C} \rightarrow M(\mathbb{C} \otimes S_{kj}) = M(S_{kj})$ vérifient $\delta_{A_j}^k(1) = p_{kj}$ et pour tout i, j, k , on a avec les notations 2.30 et 3.15, $\mathcal{E}_{jk}^i = E_{jk}^i$.

Le produit croisé $B = A \rtimes \mathcal{G}$ est canoniquement isomorphe à \widehat{S} . Plus précisément $\pi_B : (B, \alpha_B, \delta_B) \rightarrow (\widehat{S}, \widehat{\alpha}, \widehat{\delta})$ est un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{G}}$ -algèbres.

b) Dans le cas 3.4 de l'action du groupoïde \mathcal{G} dans lui même, on obtient que les C^* -algèbres $S_{11} \rtimes_{\delta_{11}^1} G_1 \oplus S_{21} \rtimes_{\delta_{21}^1} G_1$ et $S_{12} \rtimes_{\delta_{12}^2} G_2 \oplus S_{22} \rtimes_{\delta_{22}^2} G_2$ sont Morita équivalentes.

3.3 Bidualité

Soit (β_A, δ_A) une action continue du groupoïde mesuré \mathcal{G} dans une C^* -algèbre A . Posons $B = A \rtimes \mathcal{G}$ muni de l'action duale (α_B, δ_B) du groupoïde $\widehat{\mathcal{G}}$ et $C = B \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ muni de l'action (bi)duale (β_C, δ_C) .

Dans une première partie, nous montrons que la C^* -algèbre C s'identifie canoniquement à une sous- C^* -algèbre $D \subset \mathcal{L}(A \otimes H)$. Nous notons alors (β_D, δ_D) l'action continue de \mathcal{G} dans D , obtenue par transport de structure.

Dans le cas d'un groupoïde mesuré \mathcal{G} régulier, nous montrons l'égalité $D = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(A \otimes \mathcal{K}(H))q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}$. Nous décrivons aussi explicitement l'action continue (β_D, δ_D) du groupoïde mesuré \mathcal{G} dans D , à l'aide de l'action initiale (β_A, δ_A) et de la représentation régulière droite du groupoïde \mathcal{G} .

Nous examinons ensuite le cas d'une action continue d'un groupoïde de co-liason.

3.3.1 Cas général

Commençons par définir D et établir un $*$ -isomorphisme $C = A \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow D$.

3.31 Lemme-Notations. *Posons :*

a) $D := [\{ (\text{id}_A \otimes R)\delta_A(a) (1_A \otimes \lambda(x)L(s)) \mid a \in A, x \in \widehat{S}, s \in S \}] \subset \mathcal{L}(A \otimes H)$, D est une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(A \otimes H)$.

b) il existe un unique *-morphisme $\pi_R : M(A) \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes H)$ injectif et continu pour les topologies stricte/topologie *-forte vérifiant

$$\pi_R(m) = (\text{id}_A \otimes R)\delta_A(m) \quad , \quad m \in M(A) \quad , \quad \pi_R(1_A) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}$$

c) Pour tout $d \in D$, on a $q_{\beta_A, \hat{\alpha}} d = d = dq_{\beta_A, \hat{\alpha}}$. De plus, $D.(A \otimes H) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(A \otimes H)$.

d) il existe un unique *-morphisme $j_D : M(D) \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes H)$ fidèle, continu pour les topologies stricte/topologie *-forte, prolongeant id_D et vérifiant $j_D(1_D) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}$.

Dans la suite, on pose $\mathcal{E}_{A,R} = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(A \otimes H)$.

Démonstration. Pour prouver le a), on peut procéder comme dans 3.9. On peut aussi le déduire de la proposition 3.32 qui va suivre.

Le b) est une conséquence de la définition (3.2 a)).

Le b) et (2.10 b)) entraînent que pour tout $d \in D$, on a $q_{\beta_A, \hat{\alpha}} d = d = dq_{\beta_A, \hat{\alpha}}$, donc $D.(A \otimes H) \subset q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(A \otimes H)$. Pour prouver l'égalité, il suffit de remarquer que la C*-algèbre (2.19) $\lambda(\widehat{S})S$ agit de façon non dégénérée dans H , et d'utiliser la continuité de l'action (cf. 3.2 d)).

Le d) est une conséquence du c). □

Avec les notations de 3.9 et 3.11, on a :

3.32 Proposition. *il existe un unique *-isomorphisme $\phi : C \rightarrow D$ vérifiant :*

$$\phi(\widehat{\pi}(\pi(a)\widehat{\theta}(x))\theta(s)) = \pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s)) \quad , \quad a \in A, x \in \widehat{S}, s \in S$$

Posons $\delta_D = (\phi \otimes \text{id}_S) \circ \delta_C \circ \phi^{-1}$ et $\beta_D := \phi \circ \beta_C$.

(β_D, δ_D) est une action continue du groupoïde \mathcal{G} et pour tout $a \in A, x \in \widehat{S}$ et $s \in S$, nous avons :

$$(j_D \otimes \text{id}_S)\delta_D(\pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s))) = (\pi_R(a) \otimes 1_S)(1_A \otimes [(\lambda(x) \otimes 1_S)(L \otimes \text{id}_S)\delta(s)])$$

$$j_D(\beta_D(n^o)) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(1_A \otimes \beta(n^o)) \quad , \quad n \in N$$

Démonstration. Le produit croisé $B = A \rtimes \mathcal{G}$ agit de façon fidèle et non dégénérée (3.9) dans le A -module $\mathcal{E}_A = q_{\beta_A, \alpha}(A \otimes H)$. Dans la suite, on considère $M(B)$ comme une sous-C*-algèbre de la C*-algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$. Le produit croisé $C = B \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ agit de façon fidèle et non dégénérée (3.11) dans le B -module $\mathcal{E}_B = q_{\alpha_B, \widehat{\beta}}(B \otimes H)$ et on a $M(C) \subset \mathcal{L}(\mathcal{E}_B)$.

Introduisons le *-morphisme injectif, continu pour les topologies stricte/topologie *-forte :

$$\phi_0 : M(C) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_B \otimes_B \mathcal{E}_A) : T \mapsto T \otimes_B 1_{\mathcal{E}_A}$$

Par restriction au sous-C*-A-module $\mathcal{E}_B \otimes_B \mathcal{E}_A$, l'unitaire :

$$(B \otimes H) \otimes_B \mathcal{E}_A \rightarrow \mathcal{E}_A \otimes H : (b \otimes \eta) \otimes_B \xi \mapsto b\xi \otimes \eta$$

définit un unitaire $u : \mathcal{E}_B \otimes_B \mathcal{E}_A \rightarrow q_{\alpha_B, \widehat{\beta}}(\mathcal{E}_A \otimes H)$. Soit

$$\phi_1 : C \rightarrow \mathcal{L}(q_{\alpha_B, \widehat{\beta}}(\mathcal{E}_A \otimes H)) : c \mapsto u\phi_0(c)u^*$$

Posons $C_1 = \phi_1(C)$, $\beta_{C_1} = \phi_1 \circ \beta_C$, $\delta_{C_1} = (\phi_1 \otimes \text{id}_S) \circ \delta_C \circ \phi_1^{-1}$.

Pour tout $a \in A, x \in \widehat{S}$ et $s \in S$, on vérifie facilement qu'on a :

$$\phi_1((\widehat{\pi}(\pi(a)\widehat{\theta}(x))\theta(s))) = (\pi(a) \otimes 1_H)(\widehat{\theta} \otimes \lambda)\widehat{\delta}(x)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes L(s))q_{\alpha_B, \widehat{\beta}} \in \mathcal{L}(q_{\alpha_B, \widehat{\beta}}(\mathcal{E}_A \otimes H))$$

En utilisant (2.10 b)), on obtient $[q_{\beta_A, \alpha, 12}, (1_H \otimes U)V(1_H \otimes U^*)_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(A \otimes H \otimes H)$. Posons $Z := (1_H \otimes U)V(1_H \otimes U^*)_{23|_{\mathcal{E}_A \otimes H}} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H)$. A l'aide de (2.9 c)) et de (2.10 b)), on a :

$$Z^*Z = q_{\alpha_B, \hat{\beta}} = (\hat{\theta} \otimes \lambda)q_{\hat{\alpha}, \beta} \quad , \quad ZZ^* = (\hat{\theta} \otimes R)q_{\beta, \alpha}$$

Considérons alors le *-morphisme injectif :

$$\phi_Z : C_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H) : c' \mapsto Zc'Z^*$$

ϕ_Z s'étend de façon unique en un *-morphisme injectif, continu pour les topologies ϕ_Z : $M(C_1) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H)$ vérifiant $\phi_Z(1_{C_1}) = ZZ^* = (\hat{\theta} \otimes R)q_{\beta, \alpha}$.

Posons $C_2 = \phi_Z(C_1)$, $\beta_{C_2} = \phi_Z \circ \beta_{C_1}$, $\delta_{C_2} = (\phi_Z \otimes \text{id}_S) \circ \delta_{C_1} \circ \phi_Z^{-1}$.

Pour tout $a \in A$, $x \in \hat{S}$ et $s \in S$, on a (cf. 2.10 b), c) et d)) :

$$(\hat{\theta} \otimes \lambda)\hat{\delta}(x) = Z^*(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \lambda(x))Z \quad , \quad (\pi \otimes R) \circ \delta_A(a) = Z(\pi(a) \otimes 1_H)Z^* \quad , \quad [Z, 1_{\mathcal{E}_A} \otimes L(s)] = 0$$

Il en résulte que $\phi_Z \circ \phi_1(\hat{\pi}(\pi(a)\hat{\theta}(x))\theta(s)) = (\pi \otimes R) \circ \delta_A(a)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \lambda(x))(1_{\mathcal{E}_A} \otimes L(s))$.

En tenant compte du sous-espace initial et du sous-espace final de Z , on obtient :

$$C_2 = [\{(\pi \otimes R) \circ \delta_A(a)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \lambda(x))(1_{\mathcal{E}_A} \otimes L(s)) \mid a \in A, x \in \hat{S}, s \in S\}] \subset \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H)$$

Soit $j_{C_2} : M(C_2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H)$ l'unique *-morphisme continu pour les topologies stricte/ *-forte, prolongeant id_{C_2} et vérifiant $j_{C_2}(1_{C_2}) = (\hat{\theta} \otimes R)q_{\beta, \alpha}$.

Pour tout $a \in A$, $x \in \hat{S}$ et $s \in S$, posons $c = (\pi \otimes R) \circ \delta_A(a)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \lambda(x))(1_{\mathcal{E}_A} \otimes L(s))$.

On a dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H \otimes S)$, cf. (3.10) :

$$\begin{aligned} - (j_{C_2} \otimes \text{id}_S)\delta_{C_2}(c) &= ((\pi \otimes R) \circ \delta_A(a) \otimes 1_S)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \lambda(x) \otimes 1_S)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes (L \otimes \text{id}_S)\delta(s)) \\ - j_{C_2} \circ \beta_{C_2}(n^o) &= ZZ^*(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \beta(n^o)) = (\hat{\theta} \otimes R)q_{\beta, \alpha}(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \beta(n^o)) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_A \otimes H), \quad n \in N \end{aligned}$$

Finalement, introduisons l'unitaire

$$v : A \otimes H \otimes_{\pi} \mathcal{E}_A \rightarrow \mathcal{E}_A \otimes H : (a \otimes \eta) \otimes_{\pi} \xi \mapsto \pi(a)\xi \otimes \eta$$

Pour tout $T \in B(H)$, $m \in M(A \otimes S)$, on a facilement :

$$\begin{aligned} - v^*(1_{\mathcal{E}_A} \otimes T)v &= (1_A \otimes T) \otimes_{\pi} 1_{\mathcal{E}_A} \\ - v^*(\pi \otimes R)(m)v &= (\text{id}_A \otimes R)(m) \otimes_{\pi} 1_{\mathcal{E}_A} \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $a \in A$, $x \in \hat{S}$ et $s \in S$, on a

$$v^*(\pi \otimes R) \circ \delta_A(a)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \lambda(x)L(s))v = (\pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s)) \otimes_{\pi} 1_{\mathcal{E}_A})$$

Pour tout $c \in C_2$, posons $v^*cv = \phi_2(c) \otimes_{\pi} 1_{\mathcal{E}_A}$. On obtient un *-isomorphisme $\phi_2 : C_2 \rightarrow D$.

Pour tout $a \in A$, $x \in \hat{S}$ et $s \in S$, posons $c = (\pi \otimes R) \circ \delta_A(a)(1_{\mathcal{E}_A} \otimes \lambda(x))(1_{\mathcal{E}_A} \otimes L(s))$. on a alors :

$$\phi_2(c) = \pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s)), \quad (j_D \otimes \text{id}_S)(\phi_2 \otimes \text{id}_S)\delta_{C_2}(c) = (\pi_R(a) \otimes 1_S)(1_A \otimes [(\lambda(x) \otimes 1_S)(L \otimes \text{id}_S)\delta(s)])$$

$$j_D \circ \phi_2 \circ \beta_{C_2}(n^o) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(1_A \otimes \beta(n^o)) \quad , \quad n \in N$$

Le *-isomorphisme $\phi := \phi_2 \circ \phi_Z \circ \phi_1$ convient. □

Dans ce qui suit, nous allons décrire l'action continue (β_D, δ_D) à l'aide de l'action initiale (β_A, δ_A) et de la représentation régulière droite du groupoïde \mathcal{G} .

3.33 Notation. a) V étant (2.2) la représentation régulière droite de \mathcal{G} , on note \mathcal{V} l'unique isométrie partielle de $\mathcal{L}(H \otimes S)$ vérifiant $(\rho \otimes \text{id}_S)\mathcal{V} = V$.

b) La C*-algèbre $\mathcal{K}(H)$ est notée \mathcal{K} .

c) On note $\delta_0 : A \otimes \mathcal{K} \rightarrow M(A \otimes \mathcal{K} \otimes S)$ le *-morphisme injectif vérifiant :

$$\delta_0(a \otimes k) = \delta_A(a)_{13}(1_A \otimes k \otimes 1_S) \quad a \in A, k \in \mathcal{K} \quad (3.17)$$

d) Pour tout $x \in M(A \otimes \mathcal{K})$ et tout $n \in N$, posons :

$$\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(x) = \mathcal{V}_{23} \delta_0(x) \mathcal{V}_{23}^* \quad , \quad \beta_{A \otimes \mathcal{K}}(n^o) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(1_A \otimes \beta(n^o)) \quad (3.18)$$

δ_0 (resp. $\delta_0 \otimes \text{id}_S$), se prolonge de façon unique en un *-morphisme $M(A \otimes \mathcal{K}) \rightarrow M(A \otimes \mathcal{K} \otimes S)$ (resp. $M(A \otimes \mathcal{K} \otimes S) \rightarrow M(A \otimes \mathcal{K} \otimes S \otimes S)$), strictement continu et injectif vérifiant :

$$\delta_0(1_{A \otimes \mathcal{K}}) = q_{\beta_A, \alpha, 13}, \text{ (resp. } (\delta_0 \otimes \text{id}_S)(1_{A \otimes \mathcal{K} \otimes S}) = q_{\beta_A, \alpha, 13}) \quad (3.19)$$

De même, on a un *-morphisme strictement continu et injectif :

$$\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta : M(A \otimes \mathcal{K} \otimes S) \rightarrow M(A \otimes \mathcal{K} \otimes S \otimes S) \quad , \quad (\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)(1_{A \otimes \mathcal{K} \otimes S}) = q_{\beta, \alpha, 34} \quad (3.20)$$

3.34 Lemme. Pour tout $x \in M(A \otimes \mathcal{K})$, on a :

$$q_{\beta_A, \alpha, 13}(\delta_0 \otimes \text{id}_S)\delta_0(x) = (\delta_0 \otimes \text{id}_S)\delta_0(x) = (\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)\delta_0(x) = q_{\beta, \alpha, 34}(\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)\delta_0(x)$$

Démonstration. Pour tout $a \in A$, on a :

$$(\delta_0 \otimes \text{id}_S)(\delta_A(a)_{13}) = [(\delta_A \otimes \text{id}_S)\delta_A(a)]_{134} = [(\text{id}_A \otimes \delta)\delta_A(a)]_{134}$$

$$(\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)(\delta_A(a)_{13}) = [(\text{id}_A \otimes \delta)\delta_A(a)]_{134}$$

Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on a :

$$(\delta_0 \otimes \text{id}_S)(1_A \otimes k \otimes 1_S) = q_{\beta_A, \alpha, 13}(1_A \otimes k \otimes 1_{S \otimes S})$$

$$(\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)(1_A \otimes k \otimes 1_S) = q_{\beta, \alpha, 34}(1_A \otimes k \otimes 1_{S \otimes S})$$

□

Notons que $\beta_{A \otimes \mathcal{K}} : N^o \rightarrow M(A \otimes \mathcal{K})$ est un *-morphisme car $[\hat{\alpha}(N), \beta(N^o)] = 0$.

3.35 Lemme. $\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(1_{A \otimes \mathcal{K}}) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12} q_{\beta, \alpha, 23}$ et pour tout $n \in N$, on a :

$$\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(\beta_{A \otimes \mathcal{K}}(n^o)) = \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(1_{A \otimes \mathcal{K}})(1_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \beta(n^o)) \quad (3.21)$$

Démonstration. En utilisant (2.10 b)) et (2.9 c)), on a :

$$\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(1_{A \otimes \mathcal{K}}) = \mathcal{V}_{23} \delta_0(1_{A \otimes \mathcal{K}}) \mathcal{V}_{23}^* = \mathcal{V}_{23} q_{\beta_A, \alpha, 13} \mathcal{V}_{23}^* = q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12} \mathcal{V}_{23} \mathcal{V}_{23}^* = q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12} q_{\beta, \alpha, 23} \quad (3.22)$$

et à l'aide de (3.2 c)), on déduit :

$$\delta_0(q_{\beta_A, \hat{\alpha}}) = q_{\beta_A, \alpha, 13} q_{\hat{\alpha}, \beta, 23} = q_{\beta_A, \alpha, 13} \mathcal{V}_{23}^* \mathcal{V}_{23} \quad (3.23)$$

Pour $n \in N$, on a :

$$\begin{aligned} \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(\beta_{A \otimes \mathcal{K}}(n^o)) &= \mathcal{V}_{23} \delta_0(q_{\beta_A, \hat{\alpha}})(1_A \otimes \beta(n^o) \otimes 1_S) \mathcal{V}_{23}^* = \mathcal{V}_{23} q_{\beta_A, \alpha, 13} \mathcal{V}_{23}^* \mathcal{V}_{23}(1_A \otimes \beta(n^o) \otimes 1_S) \mathcal{V}_{23}^* \\ &= q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12} q_{\beta, \alpha, 23} \mathcal{V}_{23}(1_A \otimes \beta(n^o) \otimes 1_S) \mathcal{V}_{23}^* = q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12} q_{\beta, \alpha, 23} (1_{A \otimes \mathcal{K}} \beta(n^o)) \\ &= \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(1_{A \otimes \mathcal{K}})(1_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \beta(n^o)) \end{aligned}$$

□

Nous avons :

3.36 Lemme. *Pour tout $x \in M(A \otimes \mathcal{K})$, on a $(\delta_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \text{id}_S) \circ \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(x) = (\text{id}_A \otimes \delta) \circ \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(x)$*

Démonstration. Pour tout $x \in M(A \otimes \mathcal{K})$, on a :

$$\begin{aligned} (\delta_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \text{id}_S)(\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(x)) &= \mathcal{V}_{23}(\delta_0 \otimes \text{id}_S)(\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(x))\mathcal{V}_{23}^* = \mathcal{V}_{23}\mathcal{V}_{24}q_{\beta_A, \alpha, 13}(\delta_0 \otimes \text{id}_S)\delta_0(x)q_{\beta_A, \alpha, 13}\mathcal{V}_{24}^*\mathcal{V}_{23}^* \\ &= \mathcal{V}_{23}\mathcal{V}_{24}(\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)\delta_0(x)\mathcal{V}_{24}^*\mathcal{V}_{23}^* = (\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)(\mathcal{V}_{23}\delta_0(x)\mathcal{V}_{23}^*) \\ &= (\text{id}_{A \otimes \mathcal{K}} \otimes \delta)\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(x) \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, on identifie $M(A \otimes \mathcal{K})$ (resp. $(M(A \otimes \mathcal{K} \otimes S))$) à $\mathcal{L}(A \otimes H)$, (resp. $\mathcal{L}(A \otimes H \otimes S)$).

3.37 Proposition. *Pour tout $a \in A, x \in \widehat{S}, s \in S$, on a :*

- a) $(\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_0(\pi_R(a)) = q_{\beta_A, \alpha, 13}(1_A \otimes U \otimes 1_H)\Sigma_{23}V_{23}(\pi_L(a) \otimes 1_H)V_{23}^*\Sigma_{23}(1_A \otimes U^* \otimes 1_H)q_{\beta_A, \alpha, 13}$
- b) $\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(\pi_R(a)) = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}q_{\beta, \alpha, 23}(\pi_R(a) \otimes 1_S)$, $\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(\pi_R(T)) = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}q_{\beta, \alpha, 23}[\pi_R(T) \otimes 1_S]$, $T \in M(A)$
- c) $\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(1_A \otimes \lambda(x)L(s)) = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}q_{\beta, \alpha, 23}(1_A \otimes \lambda(x) \otimes 1_S)(1_A \otimes [(L \otimes \text{id}_S)\delta(s)])$
 $= q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}(1_A \otimes \lambda(x) \otimes 1_S)(1_A \otimes [(L \otimes \text{id}_S)\delta(s)])$
- d) $\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(\pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s))) = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}\pi_R(a)_{12}(1_A \otimes \lambda(x) \otimes 1_S)(1_A \otimes [(L \otimes \text{id}_S)\delta(s)])$
 $= (\pi_R(a) \otimes 1_S)(1_A \otimes [(\lambda(x) \otimes 1_S)(L \otimes \text{id}_S)\delta(s)])$

Démonstration. Reprenons (3.7 , 3.31 b)) les représentations $\pi_R, \pi_L : M(A) \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes H)$.

On a $[V^*V, S \otimes 1_H] = 0$, (cf. 2.9 c) et 2.10 b)). On en déduit que pour tout $a \in A$, on a :

$$(\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_0(\pi_L(a)) = \Sigma_{23}V_{23}(\pi_L(a) \otimes 1_H)V_{23}^*\Sigma_{23} \quad (3.24)$$

On en déduit :

$$(\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_0(\pi_R(a)) = q_{\beta_A, \alpha, 13}(1_A \otimes U \otimes 1_H)\Sigma_{23}V_{23}(\pi_L(a) \otimes 1_H)V_{23}^*\Sigma_{23}(1_A \otimes U^* \otimes 1_H)q_{\beta_A, \alpha, 13} \quad (3.25)$$

d'où le a). Il s'ensuit qu'on a aussi :

$$\begin{aligned} (\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(\pi_R(a)) &= q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}V_{23}(1_A \otimes U \otimes 1_H)\Sigma_{23}V_{23}(\pi_L(a) \otimes 1_H)V_{23}^*\Sigma_{23}(1_A \otimes U^* \otimes 1_H)V_{23}^*q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12} \\ &= q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}V_{23}\widetilde{V}_{23}\pi_L(a)_{13}\widetilde{V}_{23}^*V_{23}^*q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Posons avec les notations de 2.13, $T_{\widehat{\beta}, \widehat{\alpha}} = \sum_{l=1}^k \lambda_l(\widehat{\beta}(e^{(l)}) \otimes \widehat{\alpha}(e^{(l)}))$.

Il résulte alors de (2.13 , 2.9 c) et 2.10 b)), qu'on a :

$$\begin{aligned} (\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_{A \otimes \mathcal{K}}(\pi_R(a)) &= q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}W_{23}^*\Sigma_{23}(1_A \otimes 1_H \otimes U^*)T_{\widehat{\beta}, \widehat{\alpha}, 23}\pi_L(a)_{13}T_{\widehat{\beta}, \widehat{\alpha}, 23}^*(1_A \otimes 1_H \otimes U)\Sigma_{23}W_{23}q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12} \\ &= q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}\pi_R(a)_{12}W_{23}^*\Sigma_{23}(1_A \otimes 1_H \otimes U^*)T_{\widehat{\beta}, \widehat{\alpha}, 23}T_{\widehat{\beta}, \widehat{\alpha}, 23}^*(1_A \otimes 1_H \otimes U)\Sigma_{23}W_{23}q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12} \\ &= q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}q_{\beta, \alpha, 23}\pi_R(a)_{12} \end{aligned}$$

Ce qui établit la première relation du b). Par continuité stricte, on déduit aussi la deuxième relation.

Pour la preuve du c), on a (cf. 2.10 b) et c)) :

$$\begin{aligned} \delta_{A \otimes \mathcal{K}}((1_A \otimes \lambda(x)L(s))) &= \mathcal{V}_{23}\delta_0((1_A \otimes \lambda(x)L(s)))\mathcal{V}_{23}^* = \mathcal{V}_{23}q_{\beta_A, \alpha, 13}(1_A \otimes \lambda(x)L(s) \otimes 1_S)\mathcal{V}_{23}^* \\ &= q_{\beta_A, \widehat{\alpha}, 12}(1_A \otimes \lambda(x) \otimes 1_S)(1_A \otimes [(L \otimes \text{id}_S)\delta(s)]) \end{aligned}$$

En remarquant (2.9 c)) qu'on a :

$$(\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_0(\pi_R(a)) = (\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_0(\pi_R(a))q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23} = (\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_0(\pi_R(a))V_{23}^*V_{23}$$

on déduit le d) du b) et du c). □

3.38 Corollaire. L'action biduale (β_D, δ_D) (cf. 3.32) du groupoïde \mathcal{G} dans le double produit croisé $A \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}} \simeq D$ est donnée par :

$$(j_D \otimes \text{id}_S) \delta_D(d) = \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(d) = \mathcal{V}_{23} \delta_0(d) \mathcal{V}_{23}^*, d \in D \quad ; \quad j_D \beta_D(n^o) = \beta_{A \otimes \mathcal{K}}(n^o) = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(1_A \otimes \beta(n^o)), n \in N$$

Démonstration. Pour $d = \pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s))$ avec $a \in A, x \in \widehat{S}, s \in S$, il suffit d'appliquer 3.32. La deuxième relation découle de 3.32 et de la définition de $\beta_{A \otimes \mathcal{K}}$. \square

3.39 Remarque. Par stricte continuité, on a aussi :

$$(j_D \otimes \text{id}_S) \delta_D(T) = \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(j_D(T)) = \mathcal{V}_{23} \delta_0(j_D(T)) \mathcal{V}_{23}^*, T \in M(D)$$

3.40 Théorème. Soit (β_A, δ_A) une action continue du groupoïde mesuré régulier \mathcal{G} dans une C^* -algèbre A . Alors le double produit croisé $(A \rtimes \mathcal{G}) \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$, muni de $(\beta_{(A \rtimes \mathcal{G}) \rtimes \widehat{\mathcal{G}}}, \delta_{(A \rtimes \mathcal{G}) \rtimes \widehat{\mathcal{G}}})$, est canoniquement isomorphe à la C^* -algèbre $D = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(A \otimes \mathcal{K}) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}$ munie de l'action continue (β_D, δ_D) de \mathcal{G} définie par :

$$(j_D \otimes \text{id}_S) \delta_D(d) = \delta_{A \otimes \mathcal{K}}(d) = \mathcal{V}_{23} \delta_0(d) \mathcal{V}_{23}^*, d \in D \quad ; \quad j_D \beta_D(n^o) = \beta_{A \otimes \mathcal{K}}(n^o) = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(1_A \otimes \beta(n^o)), n \in N$$

Démonstration Tenant compte de (3.32 et 3.38), il nous reste à montrer l'égalité $D = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(A \otimes \mathcal{K}) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}$. Il résulte facilement de la continuité (3.2 d) de l'action (β_A, δ_A) , et de l'inclusion $\lambda(\widehat{S})S \subset \mathcal{K}$ (cf. 2.19 et 2.38), qu'on a :

$$D \subset q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(A \otimes \mathcal{K}) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}$$

Pour démontrer l'autre inclusion, on va montrer que $\delta_0(q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(A \otimes \mathcal{K}) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}) \subset \delta_0(D)$. Nous avons besoin du lemme suivant :

3.41 Lemme. Soient $\alpha : N \rightarrow B(H)$, $\beta : N^{op} \rightarrow B(K)$ des représentations unitales.

- a) Pour tout $\xi, \eta \in H$, nous avons $q_{\alpha, \beta}(R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \otimes 1_K) = (R_\xi^\alpha(R_\eta^\alpha)^* \otimes 1_K) q_{\alpha, \beta} = q_{\alpha, \beta}(\theta_{\xi, \eta} \otimes 1_K) q_{\alpha, \beta}$.
- b) Pour tout $\xi, \eta \in K$, nous avons $q_{\alpha, \beta}(1_H \otimes L_\xi^\beta(L_\eta^\beta)^*) = (1_H \otimes L_\xi^\beta(L_\eta^\beta)^*) q_{\alpha, \beta} = q_{\alpha, \beta}(1_H \otimes \theta_{\xi, \eta}) q_{\alpha, \beta}$.

Pour la preuve, voir l'appendice (cf. 5.11).

Démonstration du théorème. (3.23) nous donne $\delta_0(q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}) = q_{\beta_A, \alpha, 13} q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23}$ et, par continuité de l'action, on a

$$q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(A \otimes \mathcal{K}) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}} \subset [q_{\beta_A, \widehat{\alpha}} \pi_R(a)(1_A \otimes k) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}} \mid a \in A, k \in \mathcal{K}]$$

On remarque que $\pi_R(a) = q_{\beta_A, \widehat{\alpha}} \pi_R(a) = \pi_R(a) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}$

Pour $a \in A, k \in \mathcal{K}$, on a :

$$\delta_0(\pi_R(a) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(1_A \otimes k) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}) = \delta_0(\pi_R(a)) q_{\beta_A, \alpha, 13} q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23} (1_A \otimes k \otimes 1_S) q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23} q_{\beta_A, \alpha, 13}$$

En appliquant 3.41 à $\widehat{\alpha}$ et β , on obtient :

$$q_{\widehat{\alpha}, \beta}(\mathcal{K} \otimes 1_S) q_{\widehat{\alpha}, \beta} = q_{\widehat{\alpha}, \beta}([R_\xi^{\widehat{\alpha}}(R_\eta^{\widehat{\alpha}})^* \mid \xi, \eta \in H] \otimes 1_S) = q_{\widehat{\alpha}, \beta}(UC_W U^* \otimes 1_S)$$

Il en résulte que :

$$\delta_0(\pi_R(a) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}(1_A \otimes k) q_{\beta_A, \widehat{\alpha}}) \in [\delta_0(\pi_R(a)) q_{\beta_A, \alpha, 13} q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23} (1_A \otimes \lambda(x)L(s) \otimes 1_S) \mid x \in \widehat{S}, s \in S].$$

Finalement, on a $\delta_0(\pi_R(a)) q_{\beta_A, \alpha, 13} q_{\widehat{\alpha}, \beta, 23} (1_A \otimes \lambda(x)L(s) \otimes 1_S) = \delta_0(\pi_R(a)) (1_A \otimes \lambda(x)L(s)) \in \delta_0(D)$ \square

3.3.2 Structure du double produit croisé $A \rtimes \mathcal{G}_{G_1, G_2} \rtimes \widehat{\mathcal{G}_{G_1, G_2}}$

Dans cette section, nous développons les conséquences du théorème 3.40 dans le cas d'une action continue 3.17 (A, β_A, δ_A) , d'un groupoïde de co-liason 2.35 $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{G_1, G_2}$, associés deux groupes quantiques l.c G_1 et G_2 .

Pour décrire la \mathcal{G} -algèbre double produit croisé (D, β_D, δ_D) , nous conservons les notations de la section précédente et nous utilisons les notations 3.15 et 3.17 pour la \mathcal{G} -algèbre (A, β_A, δ_A) . Avec ces notations, on vérifie facilement qu'on a :

$$j_D(\beta_D(\varepsilon_j)) = q_j \otimes \beta(\varepsilon_j) \in \mathcal{L}(A \otimes H) \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.27)$$

Par 3.17 appliquée à la \mathcal{G} -algèbre D , nous avons :

$$D = D_1 \oplus D_2 \quad , \quad D_j := \beta_D(\varepsilon_j)D = (q_j \otimes \beta(\varepsilon_j))D \subset \mathcal{L}(A \otimes H)$$

La coaction $\delta_D : D \rightarrow M(D \otimes S)$ est déterminée (3.17 a)) par les *-morphisms $\delta_{D_j}^k : D_j \rightarrow M(D_k \otimes S_{kj})$. définis par

$$\pi_j^k \circ \delta_{D_j}^k(x) = (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})\delta_D(x) \quad , \quad x \in D_j$$

où $\pi_j^k : M(D_k \otimes S_{kj}) \rightarrow M(D \otimes S)$ est le prolongement strictement continu de l'inclusion $D_k \otimes S_{kj} \subset D \otimes S$ vérifiant $\pi_j^k(1_{D_k \otimes S_{kj}}) = \beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}$.

3.42 Notations. Soient $j, k, l = 1, 2$

- a) $U_{jk} : H_{jk} \rightarrow H_{kj}$ est la restriction de l'unitaire U au sous-espace H_{jk} . On note $R_{jk} : S_{jk} \rightarrow B(H_{kj})$ la représentation définie par $R_{jk}(x) = U_{jk}L(x)U_{jk}^*$.
- b) $\iota_j : M(D_j) \rightarrow M(D)$ est le prolongement strictement continu de l'inclusion $D_j \subset D$ vérifiant $\iota_j(1_{D_j}) = \beta_D(\varepsilon_j)$.
 $\iota_{kj} = (j_D \otimes L) \circ \pi_j^k : M(D_k \otimes S_{kj}) \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes H)$ est la représentation continue pour les topologies stricte/*-forte vérifiant $\iota_{kj}(1_{D_k \otimes S_{kj}}) = q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}$.
- c) $\mathcal{E}_{A,R} = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(A \otimes H) = (q_1 \otimes \beta(\varepsilon_1) + q_2 \otimes \beta(\varepsilon_2))(A \otimes H) = \mathcal{E}_{A,R,1} \oplus \mathcal{E}_{A,R,2}$ avec

$$\mathcal{E}_{A,R,k} = A_k \otimes \beta(\varepsilon_k)H = A_k \otimes H_{1k} \oplus A_k \otimes H_{2k} \quad , \quad k = 1, 2 \quad (3.28)$$

- d) $q_{lkj} := q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj} \in \mathcal{L}(A \otimes H \otimes H)$

3.43 Lemme. Soient $a \in A, x \in \hat{S}, s \in S$, posons

$$d = \pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s)) = d_1 + d_2 \quad , \quad d_j = (q_j \otimes \beta(\varepsilon_j))d$$

Nous avons :

$$a) \quad d_j = \sum_{l,l'} d_{ll',j} \quad \text{avec} \quad d_{ll',j} = \pi_R(aq_l)(1_A \otimes p_{lj}\lambda(x)p_{l'j}L(s)p_{l'j}) = \pi_R(aq_l)(1_A \otimes \hat{\pi}^j(\lambda(x_{ll'}))L(s)p_{l'j})$$

b)

$$(q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})(j_D \otimes L)\delta_D(d_j) = \sum_{l,l'} q_{lkj} V_{23}(q_k \otimes p_{lj} \otimes p_{kj}) \Sigma_{23}(\pi_L \otimes R) \delta_A(aq_l) \Sigma_{23} \\ (1_A \otimes p_{lj}\lambda(x)p_{l'j}L(s) \otimes 1_H)(q_k \otimes p_{l'j} \otimes p_{kj})(V_{23})^* q_{l'kj} \quad (3.29)$$

Démonstration. Par définition de la représentation (2.30 b)) $\hat{\pi}^j$, on a $p_{lj}\lambda(x)p_{l'j} = \hat{\pi}^j(\lambda(x_{ll'}))$. En utilisant (2.1), on obtient :

$$d_j = (q_j \otimes \beta(\varepsilon_j))\pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s)) = (q_j \otimes \beta(\varepsilon_j))\pi_R(a)(1_A \otimes \beta(\varepsilon_j)\lambda(x)\beta(\varepsilon_j)L(s)) \\ = \sum_{l,l'} (q_j \otimes \beta(\varepsilon_j))\pi_R(a)(1_A \otimes p_{lj}\lambda(x)p_{l'j}L(s))p_{l'j} \quad (3.30)$$

Par 3.16, on a $(q_j \otimes \beta(\varepsilon_j))\pi_R(a)(1_A \otimes p_{lj}) = \pi_R(aq_l)(1_A \otimes p_{lj})$, d'où le a).

Par 3.38, nous avons :

$$(j_D \otimes L)\delta_D(d_{ll',j}) = V_{23}(\text{id}_A \otimes L)\delta_0(d_{ll',j})V_{23}^* \quad (3.31)$$

Par le (3.37 a)), nous avons

$$\begin{aligned} (\text{id}_{A \otimes H} \otimes L)\delta_0(\pi_R(a)) &= q_{\beta_A, \alpha, 13}(1_A \otimes U \otimes 1_H)\Sigma_{23}V_{23}(\pi_L(a) \otimes 1_H)V_{23}^*\Sigma_{23}(1_A \otimes U^* \otimes 1_H)q_{\beta_A, \alpha, 13} \\ &= q_{\beta_A, \alpha, 13}\Sigma_{23}(\pi_L \otimes R)\delta_A(aq_l)\Sigma_{23}q_{\beta_A, \alpha, 13} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (\text{id}_A \otimes L)\delta_0(d_{ll',j}) &= (\text{id}_A \otimes L)\delta_0(\pi_R(aq_l))q_{\beta_A, \alpha, 13}(1_A \otimes p_{lj}\lambda(x)p_{l'j}L(s) \otimes 1_H) \\ &= q_{\beta_A, \alpha, 13}\Sigma_{23}(\pi_L \otimes R)\delta_A(aq_l)\Sigma_{23}q_{\beta_A, \alpha, 13}(1_A \otimes p_{lj}\lambda(x)p_{l'j}L(s) \otimes 1_H) \end{aligned}$$

En utilisant (2.10 b)), la relation (3.31) devient :

$$(j_D \otimes L)\delta_D(d_{ll',j}) = q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12}V_{23}\Sigma_{23}(\pi_L \otimes R)\delta_A(aq_l)\Sigma_{23}(1_A \otimes p_{lj}\lambda(x)p_{l'j}L(s) \otimes 1_H)V_{23}^*q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12}$$

Mais on a $\hat{\alpha} = \beta$ et les projecteurs q_k, p_{lj} sont centraux dans $M(A)$ et $M(S)$ respectivement. En tenant compte des relations de commutation (2.10 b)) et de la notation (3.42 d)), on obtient :

$$\begin{aligned} (q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})V_{23}(1_A \otimes p_{lj} \otimes 1_H) &= (q_k \otimes \alpha(\varepsilon_l)\beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})V_{23}(1_A \otimes p_{lj} \otimes 1_H) \\ &= q_{lkj}V_{23}(q_k \otimes p_{lj} \otimes p_{kj}) \end{aligned}$$

et aussi $(q_k \otimes p_{l'j} \otimes p_{kj})V_{23}^*q_{\beta_A, \hat{\alpha}, 12} = (q_k \otimes p_{l'j} \otimes p_{kj})V_{23}^*q_{l'kj}$, d'où le b). \square

Avec les notations (3.42 c)), introduisons les representations π_{D_j} et $\pi_{D_k} \otimes L_{kj}$ définies par :

$$\pi_{D_j} : D_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,R,j}) : u \mapsto \pi_{D_j}(u) = u|_{\mathcal{E}_{A,R,j}} \quad , \quad \pi_{D_k} \otimes L_{kj} : D_k \otimes S_{kj} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,R,k} \otimes H_{kj}) \quad (3.32)$$

Les représentations π_{D_j} et $\pi_{D_k} \otimes L_{kj}$ sont fidèles et non dégénérées. Les prolongements strictement continus aux C^* -algèbres des multiplicateurs, sont donnés par :

$$\pi_{D_j} : M(D_j) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,R,j}) : T \mapsto j_D(\iota_j(T))|_{\mathcal{E}_{A,R,j}} \quad , \quad \iota_j : M(D_j) \rightarrow M(D) \quad , \quad \iota_j(1_{D_j}) = \beta_D(\varepsilon_j)$$

$$\pi_{D_k} \otimes L_{kj} : M(D_k \otimes S_{kj}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,R,k} \otimes H_{kj}) : T \mapsto (\pi_{D_k} \otimes L_{kj})(T) = (j_D \otimes L)\pi_j^k(T)|_{\mathcal{E}_{A,R,k} \otimes H_{kj}}$$

3.44 Proposition. Soient $a \in A$, $x \in \hat{S}$, $s \in S$. Posons

$$d = \pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)L(s)) = d_1 + d_2 \quad , \quad \text{avec} \quad d_j = (q_j \otimes \beta(\varepsilon_j))d$$

Nous avons avec les notations (2.30 b) et 3.42) :

a) Dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,R,j}) = \oplus_{l,l'}\mathcal{L}(A_j \otimes H_{l'j}, A_j \otimes H_{lj})$, on a :

$$\pi_{D_j}(d_j) = \sum_{l,l'}(\text{id}_{A_j} \otimes R_{jl})(\delta_{A_l}^j(aq_l))(1_{A_j} \otimes \hat{\pi}^j(\lambda(x_{ll'}))L(s)p_{l'j})$$

b) Dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,R,k} \otimes H_{kj}) = \oplus_{l,l'}\mathcal{L}(A_k \otimes H_{l'k} \otimes H_{kj}, A_k \otimes H_{lk} \otimes H_{kj})$, on a :

$$\begin{aligned} (\pi_{D_k} \otimes L_{kj})\delta_{D_j}^k(d_j) &= \\ \sum_{l,l'} V_{kj,23}^l \Sigma_{23}(\text{id}_{A_k} \otimes L_{kj} \otimes R_{jl})[(\delta_{A_j}^k \otimes \text{id}_{S_{jl}})\delta_{A_l}^j(aq_l)](1_{A_k} \otimes 1_{H_{kj}} \otimes \hat{\pi}^j(\lambda(x_{ll'}))L(s)p_{l'j})\Sigma_{23}(V_{kj,23}^{l'})^* \end{aligned}$$

Démonstration. La définition des *-morphisms 3.17 $\delta_{A_l}^j$ entraîne avec les notations 3.42 :

$$\pi_{D_j}(d_{l',j}) = (\text{id}_{A_j} \otimes R_{jl})(\delta_{A_l}^j(aq_l))(1_{A_j} \otimes \hat{\pi}^j(\lambda(x_{l'}))L(s)p_{l',j}) \in \mathcal{L}(A_j \otimes H_{l',j}, A_j \otimes H_{l,j})$$

d'où le a).

Pour tout $T \in M(D_k \otimes S_{kj})$, on a $(\pi_{D_k} \otimes L_{kj})(T) = (j_D \otimes L)\pi_j^k(T)|_{\mathcal{E}_{A,R,k} \otimes H_{kj}}$.

Par définition 3.17 des *-morphisms $\delta_{D_j}^k$ et (3.27) de β_D , on a :

$$(j_D \otimes L)\pi_j^k \delta_{D_j}^k(d_{l',j}) = (j_D \otimes L)(\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})\delta_D(d_{l',j}) = (q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})(j_D \otimes L)\delta_D(d_{l',j})$$

Le b) de 3.43 nous donne :

$$(j_D \otimes L)\pi_j^k \delta_{D_j}^k(d_{l',j}) = q_{lkj} V_{23}(q_k \otimes p_{lj} \otimes p_{kj}) \Sigma_{23}(\pi_L \otimes R) \delta_A(aq_l) \Sigma_{23}(1_A \otimes p_{lj} \lambda(x)p_{l',j} L(s) \otimes 1_H)(q_k \otimes p_{l',j} \otimes p_{kj})(V_{23})^* q_{l',kj}$$

Comme $q_{lkj} = q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj}$ et en tenant compte des notations 2.24, on déduit :

$$\begin{aligned} & (\pi_{D_k} \otimes L_{kj})\delta_{D_j}^k(d_j) = \\ & \sum_{l,l'} V_{kj,23}^l \Sigma_{23}(\text{id}_{A_k} \otimes L_{kj} \otimes R_{jl})[(\delta_{A_j}^k \otimes \text{id}_{S_{jl}})\delta_{A_l}^j(aq_l)](1_{A_k} \otimes 1_{H_{kj}} \otimes \hat{\pi}^j(\lambda(x_{l'}))L(s)p_{l',j}) \Sigma_{23}(V_{kj,23}^{l'})^* \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, nous allons montrer que chaque G_j -algèbre $(D_j, \delta_{D_j}^j)$ est une algèbre de liaison.

3.45 Lemme. Pour $l, j = 1, 2$, nous avons :

- a) il existe un unique projecteur $e_{l,j} \in M(D_j)$ vérifiant $j_D(\iota_j(e_{l,j})) = q_j \otimes p_{lj}$.
- b) On a $e_{1,j} + e_{2,j} = 1_{D_j}$, $[D_j e_{l,j} D_j] = D_j$, $\delta_{D_j}^j(e_{l,j}) = e_{l,j} \otimes 1_{S_{jj}}$
- c) Pour $k = 1, 2$, on a $\delta_{D_j}^k(e_{l,j}) = e_{l,k} \otimes 1_{S_{kj}}$
- d) $\pi_{D_j}(e_{l,j}) = e_{l,A_j}$ où $e_{l,A_j} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_{A,R,j})$ est le projecteur sur le sous-module $A_j \otimes H_{lj}$.

Démonstration. On a $j_D(M(D)) = \{T \in \mathcal{L}(A \otimes H) / TD \subset D, DT \subset D, Tj_D(1_D) = j_D(1_D)T = T\}$. On déduit alors de la définition de D et de $j_D(1_D)$ (cf. 3.31 a) et d)), que $T := q_j \otimes p_{lj} \in j_D(M(D))$.

Comme $Tj_D(\beta_D(\varepsilon_j)) = T(q_j \otimes \beta(\varepsilon_j)) = T$, on a $q_j \otimes p_{lj} \in j_D(\beta_D(\varepsilon_j)M(D))$. L'existence et l'unicité de $e_{l,j} \in M(D_j)$ résulte alors de l'égalité $i_j(M(D_j)) = \beta_D(\varepsilon_j)M(D)$, d'où le a).

Le *-morphisme $j_D \circ \iota_j$ étant fidèle et prolongeant l'inclusion $D_j \subset D$, il est clair qu'on a $e_{1,j} + e_{2,j} = 1_{D_j}$. L'égalité $[D_j e_{l,j} D_j] = D_j$ se déduit (3.43 a)) et de $[E_{l',l,\lambda}^j E_{l'',\lambda}^j] = E_{l'l'',\lambda}^j$ (cf. 2.31).

L'égalité $\delta_{D_j}^k(e_{l,j}) = e_{l,k} \otimes 1_{S_{kj}}$ est équivalente à :

$$(j_D \otimes L)\pi_j^k \delta_{D_j}^k(e_{l,j}) = q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj} \quad (3.33)$$

On a :

$$(j_D \otimes L)\pi_j^k \delta_{D_j}^k(e_{l,j}) = (j_D \otimes L)(\delta_D(i_j(e_{l,j}))(\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})) \quad (3.42 b))$$

$$= V_{23}(\text{id} \otimes L)\delta_0(j_D(i_j(e_{l,j})))V_{23}^*(q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) \quad (3.39 \text{ et } 3.27)$$

$$= V_{23}(\text{id} \otimes L)\delta_0(q_j \otimes p_{lj})V_{23}^*(q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) \quad (a))$$

$$= \sum_s V_{23}q_{\beta_A, \alpha, 13}(q_s \otimes p_{lj} \otimes p_{sj})V_{23}^*(q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) \quad (3.13)$$

$$= V_{23}(q_k \otimes p_{lj} \otimes p_{kj})V_{23}^*(q_k \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) \quad (3.12)$$

$$= [VV^*(1_H \otimes \beta(\varepsilon_j))VV^*]_{23}(q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj}) \quad (2.28 a))$$

$$= q_{\beta, \alpha, 23}(q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj}) = q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj}$$

Pour la preuve du d), on a $\pi_{D_j}(e_{l,j}) = j_D(\iota_j(e_{l,j}))|_{\mathcal{E}_{A,R,j}} = (q_j \otimes p_{lj})|_{\mathcal{E}_{A,R,j}} = e_{l,A_j}$.

□

3.46 Notations. Pour $j, l, l' = 1, 2$, posons

$$D_{ll',j} := e_{l,j} D_j e_{l',j} \quad , \quad D_{l,j} := D_{ll,j}$$

3.47 Corollaire. Pour $j, l, l' = 1, 2$, nous avons :

- a) Par restriction de la structure de G_j -algèbre de D_j , $D_{ll',j}$ est un $D_{l,j} - D_{l',j}$ bimodule hilbertien G_j -équivariant (cf. [1]).
- b) Dans le cas $j \neq k$, nous avons :
 - (i) le $*$ -morphisme $D_j \rightarrow \delta_{D_j}^k(D_j) : x \mapsto \delta_{D_j}^k(x)$ est un $*$ -isomorphisme d'algèbres de liaison.
 - (ii) $\delta_{D_j}^k(D_{ll',j})$ est un $\delta_{D_j}^k(D_{l,j}) - \delta_{D_j}^k(D_{l',j})$ bimodule hilbertien et par restriction de l'isomorphisme du i), le $D_{l,j} - D_{l',j}$ bimodule hilbertien G_j -équivariant $D_{ll',j}$ est canoniquement isomorphe au $\delta_{D_j}^k(D_{l,j}) - \delta_{D_j}^k(D_{l',j})$ bimodule hilbertien $\delta_{D_j}^k(D_{ll',j})$ au dessus des isomorphismes : $D_{l,j} \rightarrow \delta_{D_j}^k(D_{l,j})$ et $D_{l',j} \rightarrow \delta_{D_j}^k(D_{l',j})$

Démonstration. Le corollaire est une conséquence immédiate de 3.45. □

Nous verrons dans le cas où les groupes quantiques sont réguliers que le bimodule hilbertien G_j -équivariant $\delta_{D_j}^k(D_{ll',j})$ s'obtient directement à l'aide du bimodule $D_{ll',k}$ par un procédé d'induction.

Cas où G_1 et G_2 sont réguliers

Dans ce cas on a 3.40 $D = q_{\beta_A, \hat{\alpha}} A \otimes \mathcal{K} q_{\beta_A, \hat{\alpha}} \subset \mathcal{L}(A \otimes H)$. Comme $q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(A \otimes H) = \mathcal{E}_{A,R} = \mathcal{E}_{A,R,1} \oplus \mathcal{E}_{A,R,2}$, on en déduit que

$$\pi_{D_j} : D_j \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{E}_{A,R,j}) \quad ; \quad \mathcal{E}_{A,R,j} = A_j \otimes H_{1j} \oplus A_j \otimes H_{2j} \quad , \quad j = 1, 2$$

est un $*$ -isomorphisme d'algèbres de liaison.

Dans ce qui suit, on identifie les C^* -algèbres $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{A,R,j})$ et $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j})$ et on introduit les notations suivantes :

3.48 Notations. Pour $j, k, l, l' = 1, 2$, posons :

- a) $\mathcal{B}_k := \pi_{D_k}(D_k) = A_k \otimes \mathcal{K}(H_{1k} \oplus H_{2k})$, $\mathcal{B}_{ll',k} = A_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}, H_{lk})$, $\mathcal{B}_{l',k} = \mathcal{B}_{l'l',k} = A_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k})$
- b) $\delta_{\mathcal{B}_j}^k := (\pi_{D_k} \circ \text{id}_{S_{kj}}) \circ \delta_{D_j}^k \circ \pi_{D_j}^{-1} : \mathcal{B}_j \rightarrow M(\mathcal{B}_k \otimes S_{kj})$
- c) $\delta_{\mathcal{B}_{j,0}}^k : \mathcal{B}_j \rightarrow M(A_k \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j}) \otimes S_{kj})$ est le $*$ -morphisme injectif défini par :

$$\delta_{\mathcal{B}_{j,0}}^k(a \otimes T) := \delta_{A_j}^k(a)_{13}(1_{A_k} \otimes T \otimes 1_{S_{kj}}) \quad ; \quad a \in A_j \quad , \quad T \in \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j})$$

- d) $\delta_{\mathcal{B}_{ll',j,0}}^k : \mathcal{B}_{ll',j} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj})$ est l'application linéaire définie par :

$$\delta_{\mathcal{B}_{ll',j,0}}^k(a \otimes T) := \delta_{A_j}^k(a)_{13}(1_{A_k} \otimes T \otimes 1_{S_{kj}}) \quad ; \quad a \in A_j \quad , \quad T \in \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj})$$

- e) $\delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k : \mathcal{B}_{ll',j} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj}) : T \mapsto V_{kj,23}^{l'} \delta_{\mathcal{B}_{ll',j,0}}^k(T) (V_{kj,23}^{l'})^*$

- f) $\delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k := \delta_{\mathcal{B}_{ll,j}}^k : \mathcal{B}_{l,j} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l,k} \otimes S_{kj})$

3.49 Proposition. Pour tout $j, k, l, l' = 1, 2$, on a :

- a) $\mathcal{B}_{l,j}$ est une C^* -algèbre et $\mathcal{B}_{ll',j}$, muni des actions évidentes de $\mathcal{B}_{l,j}$ et $\mathcal{B}_{l',j}$, est un $\mathcal{B}_{l,j} - \mathcal{B}_{l',j}$ bimodule hilbertien.
- b) $\pi_{D_j}(e_{l,j} D_j e_{l',j}) = A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) = \mathcal{B}_{ll',j}$

c) Pour tout $j, k, l, l' = 1, 2$, on a :

$$\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\xi) = V_{kj,23}^l(\text{id}_{A_k} \otimes \sigma)(\delta_{A_j}^k \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{l',j}, H_{lj})})(\xi)(V_{kj,23}^{l'})^* \quad , \quad \xi \in \mathcal{B}_{l',j}$$

$$\text{où } \sigma : S_{kj} \otimes \mathcal{K}(H_{l',j}, H_{lj}) \rightarrow \mathcal{K}(H_{l',j}, H_{lj}) \otimes S_{kj} : a \otimes T \mapsto T \otimes a.$$

Démonstration. Le a) est évident. Le b) est une conséquence 3.40 de l'égalité $D = q_{\beta_A, \hat{\alpha}}(A \otimes \mathcal{K})q_{\beta_A, \hat{\alpha}} = D_1 \oplus D_2$ et de (3.45 d)). On peut aussi déduire directement le b) en utilisant la régularité 2.42 du groupoïde \mathcal{G} , la continuité 3.17 de la coaction δ_A et ((3.45 d)).

Pour établir le c), Il suffit de vérifier l'égalité cherchée pour $\xi = \pi_{D_j}(d_{l',j})$ où $d_{l',j} = \pi_R(aq_l)(1_A \otimes p_{lj}\lambda(x)p_{l',j}L(s)p_{l',j})$ (3.43 a)). Dans ce cas le c) est exactement (3.44 b)) \square

3.50 Corollaire. Soient $j, l, l' = 1, 2$.

- a) $\delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^j := \delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^j : A_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) \rightarrow \mathcal{L}(A_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) \otimes S_{jj})$ est une action continue du groupe quantique G_j dans la C^* -algèbre $\mathcal{B}_{l,j}$.
- b) Dans le cas $l = j$, la coaction $\delta_{\mathcal{B}_{j,j}}^j$ coïncide avec la coaction biduale du double produit croisé $A_j \rtimes G_j \rtimes \widehat{G_j}$, après identification (cf. [2]) avec $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{jj})$.
- c) Supposons $l \neq l'$. Alors $(\mathcal{B}_{l',j}, \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^j)$ définit une équivalence de Morita G_j -équivariante des G_j -algèbres $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj})$ et $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l',j})$.

Démonstration. Il découle de (3.47 a)) et (3.49 b)) que le $*$ -isomorphisme $\pi_{D_j} : D_j \rightarrow A_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j})$ réalise par restriction au $D_{l,j} - D_{l',j}$ bimodule hilbertien G_j -équivariant $D_{l',j}$, un isomorphisme de bimodule hilbertien G_j -équivariant de $D_{l',j}$ sur $(\mathcal{B}_{l',j}, \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^j)$. \square

3.51 Notations. Pour $j, l, l' = 1, 2$, posons :

- a) $\gamma_{l',j} := (\mathcal{B}_{l,j}, \mathcal{B}_{l',j}, \mathcal{B}_{l',j})$, l'équivalence de Morita G_j -équivariante (3.50 c)) des G_j -algèbres $\mathcal{B}_{l,j}$ et $\mathcal{B}_{l',j}$ définie par le bimodule $\mathcal{B}_{l',j}$.
- b) $\gamma_{l,j} = \gamma_{l,j}$

Pour le produit interne de bimodules G_j -équivariants, voir [1].

3.52 Proposition. Pour tout $j, l, l', l'' = 1, 2$, nous avons :

$$\gamma_{l'',j} = \gamma_{l',j} \otimes_{\mathcal{B}_{l',j}} \gamma_{l'',j} \quad (3.34)$$

Démonstration. On vérifie facilement que l'application

$$\pi : \mathcal{B}_{l',j} \otimes_{\mathcal{B}_{l',j}} \mathcal{B}_{l'',j} \rightarrow \mathcal{B}_{l'',j} : \xi \otimes_{\mathcal{B}_{l',j}} \eta \mapsto \xi \circ \eta$$

est un isomorphisme de $\mathcal{B}_{l,j} - \mathcal{B}_{l'',j}$ bimodule hilbertien.

Posons $\mathcal{E}_1 := \mathcal{B}_{l',j}$ et $\mathcal{E}_2 := \mathcal{B}_{l'',j}$ et soient $\xi_i \in \mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$.

Avec les notations de ([1] (2.10)), on vérifie sans peine qu'on a :

$$(\pi \otimes \text{id}_{S_{jj}})(\Delta(\xi_1, \xi_2)) = \delta_{\mathcal{B}_{l'',j}}^j(\pi(\xi_1 \otimes_{\mathcal{B}_{l',j}} \xi_2))$$

\square

Pour $j, k = 1, 2, j \neq k$, posons :

$$\mathcal{E}_{ll',k}^j := \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj})$$

Les relations :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k(a) \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\xi) &= \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(a\xi) \quad ; \quad \xi \in \mathcal{B}_{ll',j} \quad , \quad a \in \mathcal{B}_{j,l} \\ \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\xi) \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(a) &= \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\xi a) \quad ; \quad \xi \in \mathcal{B}_{ll',j} \quad , \quad a \in \mathcal{B}_{l',j} \\ \langle \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\xi), \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\eta) \rangle &:= \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\xi^*) \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\eta) = \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\xi^* \circ \eta) \quad ; \quad \xi, \eta \in \mathcal{B}_{ll',j} \end{aligned}$$

permettent de munir $\mathcal{E}_{ll',k}^j$ d'une structure de $\delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k(\mathcal{B}_{l,j}) - \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j})$ bimodule hilbertien.

En fait $\mathcal{E}_{ll',k}^j$ correspond au bimodule hilbertien $\delta_{D_j}^k(D_{ll',j})$ par l'identification apparue dans (3.48 a)). On se propose de donner une formule directe de la coaction de $\mathcal{E}_{ll',k}^j$ qu'on obtient à partir de celle de $\mathcal{B}_{ll',j}$, par transport de structure (i.e l'isomorphisme de bimodules $\delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k$).

Rappelons (2.27 b)) que la coaction $\delta_{kj}^j : S_{kj} \rightarrow M(S_{kj} \otimes S_{jj})$ est donnée par :

$$\delta_{kj}^j(x) = V_{jj}^k(x \otimes 1_{S_{jj}})(V_{jj}^k)^* \quad , \quad x \in S_{kj}$$

3.53 Lemme. *Pour tout $j, k, l, l' = 1, 2$, on a :*

a) *l'inclusion $\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}) \subset M(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj})$ définit un *-morphisme injectif et non dégénéré et on a*

$$M(\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j})) \subset M(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj})$$

b) *on a les deux inclusions canoniques :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}), \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j})) &\subset \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj}) \\ \mathcal{L}(\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}) \otimes S_{jj}, \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j}) \otimes S_{jj}) &\subset \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj} \otimes S_{jj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj} \otimes S_{jj}) \end{aligned}$$

Démonstration. On a (3.17 c)) $[\delta_{D_j}^k(D_j)(1_{D_k} \otimes S_{kj})] = D_k \otimes S_{kj}$. On en déduit (3.45 c)) $[\delta_{D_j}^k(D_{ll',j})(1_{D_k} \otimes S_{kj})] = D_{ll',k} \otimes S_{kj} = [\delta_{D_j}^k(D_{ll',j})(1_{D_{ll',k}} \otimes S_{kj})]$. En composant avec $\pi_{D_k} \otimes \text{id}_{S_{kj}}$, on obtient :

$$[\delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j})(1_{\mathcal{B}_{l',k}} \otimes S_{kj})] = \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj}$$

On en déduit le a) et une inclusion canonique :

$$\mathcal{L}(\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}), \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j})) \subset \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj})$$

qui permet d'établir le b) par produit tensoriel avec la C*-algèbre S_{jj} . □

L'inclusion $\mathcal{E}_{ll',k}^j := \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j}) \subset \mathcal{L}(\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}), \delta_{\mathcal{B}_{ll',j}}^k(\mathcal{B}_{ll',j}))$ et (3.53 b)), nous donne une injection :

$$\mathcal{E}_{ll',k}^j \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj} \otimes S_{jj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj} \otimes S_{jj}) : T \mapsto T_{12}$$

qui permet finalement de définir une application linéaire :

$$\delta_{ll',k}^j : \mathcal{E}_{ll',k}^j \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_{l',k} \otimes S_{kj} \otimes S_{jj}, \mathcal{B}_{ll',k} \otimes S_{kj} \otimes S_{jj}) : T \mapsto V_{jj,23}^k T_{12} (V_{jj,23}^k)^*$$

3.54 Proposition. *Pour $j, k = 1, 2, j \neq k$, nous avons :*

a) *L'application linéaire $\delta_{ll',k}^j$ est à valeurs dans $\mathcal{L}(\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}) \otimes S_{jj}, \mathcal{E}_{ll',k}^j \otimes S_{jj})$.*

b) Le morphisme $(\mathcal{B}_{l',j}, \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^j) \rightarrow (\mathcal{E}_{l',k}^j, \delta_{l',k}^j) : \xi \mapsto \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\xi)$ est un isomorphisme de bimodule G_j -équivalents au dessus des C^* -isomorphismes

$$\delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k : \mathcal{B}_{l,j} \rightarrow \delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k(\mathcal{B}_{l,j}) \quad , \quad \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k : \mathcal{B}_{l',j} \rightarrow \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j})$$

Démonstration. En appliquant le corollaire (3.18 c)) à l'action continue (biduale) (β_D, δ_D) de \mathcal{G} dans la C^* -algèbre D , on obtient un $*$ -isomorphisme G_j -équivalent :

$$(D_j, \delta_{D_j}^j) \rightarrow \delta_{D_j}^k(D_j) : x \mapsto \delta_{D_j}^k(x)$$

La C^* -algèbre $\delta_{D_j}^k(D_j)$ étant munie (3.18 b)) de la coaction $\text{id}_{D_k} \otimes \delta_{kj}^j$.
On déduit de (3.45 c), d)) et (3.47 b), i)) que

$$(\pi_{D_k} \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \delta_{D_j}^k : D_j \rightarrow M(A_k \otimes \mathcal{K}(H_{1k} \oplus H_{2k}) \otimes S_{kj})$$

est un $*$ -morphisme injectif d'algèbres de liaison et on a :

$$(\pi_{D_k} \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \delta_{D_j}^k(e_{l,j} de_{l',j}) = \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\pi_{D_j}(e_{l,j} de_{l',j})) \quad , \quad d \in D_j$$

En utilisant (3.17 b)), on a aussi :

$$(\text{id}_{D_{l',k}} \otimes \delta_{kj}^j) \delta_{D_j}^k(e_{l,j} de_{l',j}) = (\delta_{D_j}^k \otimes \text{id}_{S_{jj}}) \delta_{D_j}^j(e_{l,j} de_{l',j}) \quad , \quad d \in D_j$$

Par composition avec $(\pi_{D_k} \otimes \text{id}_{S_{kj}} \otimes \text{id}_{S_{jj}})$, on obtient :

$$(\text{id}_{\mathcal{B}_{l',k}} \otimes \delta_{kj}^j) \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\pi_{D_j}(e_{l,j} de_{l',j})) = (\delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k \otimes \text{id}_{S_{jj}}) \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^j(\pi_{D_j}(e_{l,j} de_{l',j}))$$

Soit $\Phi : \mathcal{B}_{l',j} \rightarrow \mathcal{E}_{l',k}^j : x \mapsto \Phi(x) := \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(x)$. Nous avons montré :

$$\delta_{l',k}^j(\xi) = (\Phi \otimes \text{id}_{S_{jj}}) \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^j(\Phi^{-1}(\xi)) \quad , \quad \xi \in \mathcal{E}_k^j$$

ce qui entraîne que $\Phi : \mathcal{B}_{l',j} \rightarrow \mathcal{E}_{l',k}^j$ est un isomorphisme de bimodule G_j -équivalent (au dessus des C^* -isomorphismes

$$\Psi_l : \mathcal{B}_{l,j} \rightarrow \delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k(\mathcal{B}_{l,j}) : x \mapsto \delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k(x) \quad , \quad \Psi_{l'} : \mathcal{B}_{l',j} \rightarrow \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}) : x \mapsto \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(x)$$

□

3.55 Remarque. Nous verrons dans le paragraphe suivant une construction du bimodule $\mathcal{E}_{l',k}^j := \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j})$ à partir du bimodule $\mathcal{B}_{l',k}$ dont il est une déformation.

4 Induction d'actions

Dans ce paragraphe on se fixe un groupoïde de liaison $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{G_1, G_2}$ associé à deux groupes quantiques G_1 et G_2 monoidalement équivalents et réguliers. Nous conservons les notations des paragraphes (2.3 et 2.4) pour tous les objets associés à \mathcal{G} .

Nous avons montré 3.17 qu'à toute action continue (A, β_A, δ_A) du groupoïde \mathcal{G} dans une C^* -algèbre $A = A_1 \oplus A_2$, on associe une action continue $(A_i, \delta_{A_i}^i)$ du groupe quantique G_i . Dans le cas où le groupoïde \mathcal{G} est régulier, nous allons montrer que la correspondance $(A, \beta_A, \delta_A) \rightarrow (A_1, \delta_{A_1}^1)$ est biunivoque. Plus précisément, à toute action continue (A_1, δ_{A_1}) du groupe quantique régulier G_1 , on associe canoniquement

une action continue (A_2, δ_{A_2}) du groupe quantique G_2 . Nous munirons alors la C^* -algèbre $A := A_1 \oplus A_2$ d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} , ce qui permet de construire la correspondance réciproque de la correspondance $(A, \beta_A, \delta_A) \rightarrow (A_1, \delta_{A_1}^1)$.

Notons que la correspondance bijective $(A_1, \delta_{A_1}) \rightarrow (A_2, \delta_{A_2})$ et son application à la KK -théorie équivariante de Kasparov (cf. [1, 15]), généralisent au cas des groupes quantiques l.c réguliers, deux résultats du cas compact, dus respectivement à [10] et [26]. Pour les actions dans une algèbre de von Neumann, la correspondance $(A_1, \delta_{A_1}) \rightarrow (A_2, \delta_{A_2})$ a été établie dans [7].

4.1 Equivalence des actions continues de G_1 et G_2

Le résultat le plus important de ce paragraphe est le suivant :

4.1 Proposition. *Soit $\delta_{A_1} : A_1 \rightarrow M(A_1 \otimes S_{11})$ une action continue du groupe quantique régulier G_1 . Posons :*

$$\begin{aligned} \delta_{A_1}^1 &:= \delta_{A_1} \quad , \quad \delta_{A_1}^{(2)} := (\text{id} \otimes \delta_{11}^2) \circ \delta_{A_1} : A_1 \rightarrow M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}) \\ \text{Ind}_{\mathbf{G}_1}^{\mathbf{G}_2} A_1 &:= [(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega) \delta_{A_1}^{(2)}(a) \mid a \in A_1, \omega \in B(H_{21})_*] \subset M(A_1 \otimes S_{12}) \end{aligned}$$

Alors $\text{Ind}_{\mathbf{G}_1}^{\mathbf{G}_2} A_1$ est une sous- C^* algèbre de $M(A_1 \otimes S_{12})$

Démonstration. Il est clair que $\text{Ind}_{\mathbf{G}_1}^{\mathbf{G}_2} A_1$ est stable par involution.

Le $*$ -morphisme $(\text{id} \otimes \delta_{11}^2) \circ \delta_{A_1} : A_1 \rightarrow M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21})$ est non dégénéré et S_{21} étant une sous- C^* -algèbre non dégénérée de $B(H_{21})$, on a :

$$[(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega) \delta_{A_1}^{(2)}(a) \mid a \in A_1, \omega \in B(H_{21})_*] \subset M(A_1 \otimes S_{12})$$

Posons $\mathcal{A} = \text{lin} \{(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega) \delta_{A_1}^{(2)}(a) \mid a \in A_1, \omega \in B(H_{21})_*\}$, il reste à montrer que $\mathcal{A}\mathcal{A} \subset \text{Ind}_{\mathbf{G}_1}^{\mathbf{G}_2} A_1$.

Soient $x = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega_{\xi, \eta}) \delta_{A_1}^{(2)}(a)$, $x' = (\text{id}_{A \otimes S_{12}} \otimes \omega_{\xi', \eta'}) \delta_{A_1}^{(2)}(a')$ avec $\xi, \eta, \xi', \eta' \in H_{21}$, on a :

$$xx' = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega_{\xi, \eta} \otimes \omega_{\xi', \eta'}) \delta_{A_1}^{(2)}(a)_{123} \delta_{A_1}^{(2)}(a')_{124}$$

Comme $H_{11} \neq \{0\}$ et $H_{21} \neq \{0\}$, on peut supposer que $\eta = k(\eta_1)$, $k \in \mathcal{K}(H_{21})$ et $\xi' = l(\xi'_1)$, $l \in \mathcal{K}(H_{11}, H_{21})$. Il en résulte qu'on a :

$$xx' = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega_{\xi, \eta_1} \otimes \omega_{\xi'_1, \eta'}) \delta_{A_1}^{(2)}(a)_{123} (k \otimes l^*)_{34} \delta_{A_1}^{(2)}(a')_{124}$$

Comme $k \otimes l^* \in \mathcal{K}(H_{21} \otimes H_{21}, H_{21} \otimes H_{11})$, par (2.47 a)), on peut supposer qu'on a :

$$k \otimes l^* = (1_{H_{21}} \otimes k')(W_{21}^1)^*(k'' \otimes 1_{H_{21}}) \text{ avec } k' \in \mathcal{K}(H_{11}), k'' \in \mathcal{K}(H_{21})$$

Finalement, on peut supposer que xx' est limite normique d'éléments de la forme :

$$y = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega') (\delta_{A_1}^{(2)}(a)_{123} (W_{21,34}^1)^* \delta_{A_1}^{(2)}(a')_{124} W_{21,34}^1)$$

avec $\omega \in B(H_{21})_*$, $\omega' \in B(H_{11})_*$ et $a, a' \in A_1$.

On a (2.27 b)) :

$$(W_{21,34}^1)^* \delta_{A_1}^{(2)}(a')_{124} W_{21,34}^1 = [(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{21}^1) \delta_{A_1}^{(2)}(a')]_{1234} = [(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{21}^1)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{A_1}(a')]_{1234}$$

En utilisant (2.27 a)), on obtient :

$$(W_{21,34}^1)^* \delta_{A_1}^{(2)}(a')_{124} W_{21,34}^1 = [(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{11}})(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^1) \delta_{A_1}(a')]_{1234} =$$

$$[(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{11}})(\delta_{A_1} \otimes \text{id}_{S_{11}})\delta_{A_1}(a')]_{1234}$$

Posons $\omega' = \omega'' \cdot s$ avec $\omega'' \in B(H_{11})_*$ et $s \in S_{11}$. Par continuité de la coaction δ_{A_1} , on voit que y est limite normique d'éléments de la forme

$$z = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega')(\delta_{A_1}^{(2)}(a)_{123}[(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{11}})(\delta_{A_1}(a') \otimes 1_{S_{11}})]_{1234}) = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega')(\delta_{A_1}^{(2)}(aa')_{123})$$

avec $\omega \in B(H_{21})_*$, $\omega' \in B(H_{11})_*$ et $a, a' \in A_1$, d'où le résultat. \square

4.2 Remarques. a) En fait nous avons montré que pour tout $T \in M(A_1)$ et tout $a \in A_1$, on a :

$$(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega')\delta_{A_1}^{(2)}(T)_{123}\delta_{A_1}^{(2)}(a)_{124} \in \text{Ind}_{G_1}^{G_2} A_1 \quad (4.1)$$

b) La proposition 4.1 reste vraie pour une action fortement continue d'un groupe quantique l.c semi-régulier.

c) l'idée de la preuve de 4.1, est la même que celle de ([3], Proposition 5.8)

4.3 Proposition. Posons $A_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2} A_1$. Nous avons :

a) $[A_2(1_{A_1} \otimes S_{12})] = [(1_{A_1} \otimes S_{12})A_2] = A_1 \otimes S_{12}$. En particulier, l'inclusion $A_2 \subset M(A_1 \otimes S_{12})$ définit un $*$ -morphisme injectif et non dégénéré et on a $M(A_2) \subset M(A_1 \otimes S_{12})$.

b) Posons $\delta_{A_2} := \text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12|A_2}^2$. Le $*$ -morphisme δ_{A_2} est à valeurs dans $M(A_2 \otimes S_{22})$ et $\delta_{A_2} : A_2 \rightarrow M(A_2 \otimes S_{22})$ est une action continue du groupe quantique G_2 .

c) La correspondance $A^{G_1} \rightarrow A^{G_2} : (A_1, \delta_{A_1}) \mapsto (A_2, \delta_{A_2})$ est fonctorielle.

Démonstration. Soit $x = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{A_1}^{(2)}(a)$; $a \in A_1$, $\omega \in B(H_{21})_*$. Posons $\omega = s'\omega'$, $s' \in S_{21}$ et soit $s \in S_{12}$. On a

$$x(1_{A_1} \otimes s) = (\text{id}_{A_1} \otimes \text{id}_{S_{12}} \otimes \omega')(\delta_{A_1}^{(2)}(a)(1_{A_1} \otimes s \otimes s'))$$

Mais il résulte facilement de (2.3) qu'on a $[\delta_{11}^2(S_{11})(S_{12} \otimes 1_{S_{21}})] = S_{12} \otimes S_{21}$. Comme $s \otimes s' \in S_{12} \otimes S_{21}$, on déduit que $x(1_{A_1} \otimes s)$ est limite normique d'éléments de la forme

$$y = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)[(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2)(\delta_{A_1}(a')(1_{A_1} \otimes s'))](1_{A_1} \otimes s''), \quad a' \in A_1, s' \in S_{11}, s'' \in S_{12}$$

Par continuité de la coaction δ_{A_1} , on a alors $y \in A_1 \otimes S_{12}$, donc $[A_2(1_{A_1} \otimes S_{12})] \subset A_1 \otimes S_{12}$ et aussi $[(1_{A_1} \otimes S_{12})A_2] \subset A_1 \otimes S_{12}$.

Pour montrer l'inclusion $A_1 \otimes S_{12} \subset [A_2(1_{A_1} \otimes S_{12})]$, remarquons qu'on a (2.3) :

$$[\delta_{11}^2(S_{11})(1_{S_{12}} \otimes S_{21})] = S_{12} \otimes S_{21}, \quad S_{12} = [(\text{id} \otimes \omega)\delta_{11}^2(S_{11}) \mid \omega \in B(H_{21})_*], \quad A_1 \otimes S_{11} = [\delta_{A_1}(A_1)(1_{A_1} \otimes S_{11})]$$

ce qui donne facilement l'inclusion $A_1 \otimes S_{12} \subset [A_2(1_{A_1} \otimes S_{12})]$, d'où le a).

Soit $x = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{A_1}^{(2)}(a)$; $a \in A_1$, $\omega \in B(H_{21})_*$, montrons que :

$$(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)(x) \in M(A_2 \otimes S_{22}) \subset M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22})$$

En utilisant (2.27 a) et b), on déduit :

$$\begin{aligned} (\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)(x) &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2 \otimes \text{id}_{S_{21}})(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{A_1}(a) \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{21}^2)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{A_1}(a) \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)((W_{22,34}^1)^* \delta_{A_1}^{(2)}(a)_{124} W_{22,34}^1) \end{aligned}$$

Comme $W_{22}^1 \in M(S_{22} \otimes \mathcal{K}(H_{21}))$, on a donc $(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)(x) \in M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22})$.

Posons $\omega = \omega' u$ avec $u \in \mathcal{K}(H_{21})$ et soit $s \in S_{22}$. En utilisant de nouveau que $W_{22}^1 \in M(S_{22} \otimes \mathcal{K}(H_{21}))$, on voit que $(1_{A_2} \otimes s)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)(x)$ est limite normique d'éléments y de la forme :

$$y = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(\delta_{A_1}^{(2)}(a)_{124}[(s \otimes 1_{H_{21}})W_{22}^1(1_{S_{22}} \otimes v)]_{34})$$

avec $\omega \in B(H_{21})_*$, $s \in S_{22}$, $v \in \mathcal{K}(H_{21})$.

La régularité de G_2 (cf. [2], A4) entraîne que :

$$[(s \otimes 1_{H_{21}})W_{22}^1(1_{S_{22}} \otimes v) \mid s \in S_{22}, v \in \mathcal{K}(H_{21})] = S_{22} \otimes \mathcal{K}(H_{21}) \quad (4.2)$$

d'où $(1_{A_2} \otimes S_{22})\delta_{A_2}(A_2) \subset A_2 \otimes S_{22}$. Le morphisme δ_{A_2} étant involutif, on a aussi $\delta_{A_2}(A_2)(1_{A_2} \otimes S_{22}) \subset A_2 \otimes S_{22}$.

Montrons la continuité de δ_{A_2} , i.e $A_2 \otimes S_{22} = [(1_{A_2} \otimes S_{22})\delta_{A_2}(A_2)]$.

Soit $a \in A_1, \omega' \in B(H_{21})_*$ et $s \in S_{22}$. Posons $\omega' = v\omega u$ avec $u, v \in \mathcal{K}(H_{21})$. On a :

$$[(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega')(\delta_{A_1}^{(2)}(a))] \otimes s = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)((1_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes 1_{S_{22}} \otimes u)\delta_{A_1}^{(2)}(a)_{124}(1_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes s \otimes v)).$$

Utilisant de nouveau que $W_{22}^1 \in M(S_{22} \otimes \mathcal{K}(H_{21}))$ et l'égalité (4.2), on voit facilement que $[(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega')(\delta_{A_1}^{(2)}(a))] \otimes s$ est limite normique d'éléments y de la forme :

$$y = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(1_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes s' \otimes u')(W_{22,34}^1)^* \delta_{A_1}^{(2)}(a)_{124} W_{22,34}^1$$

avec $s' \in S_{22}$, $u' \in \mathcal{K}(H_{21})$, $\omega \in B(H_{21})_*$.

En utilisant (2.27 a) et b)), on obtient que $[(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\delta_{A_1}^{(2)}(a))] \otimes s \in [(1_{A_2} \otimes S_{22})\delta_{A_2}(A_2)]$, d'où la continuité de δ_{A_2} .

On vérifie facilement grace à (2.27 a)), qu'on a $(\delta_{A_2} \otimes \text{id}_{S_{22}})\delta_{A_2} = (\text{id}_{A_2} \otimes \delta_{22}^2)\delta_{A_2}$, d'où le b).

Soient (A_1, δ_{A_1}, G_1) et (B_1, δ_{B_1}, G_1) deux systèmes dynamiques. Posons $A_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} A_1$ et $B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} B_1$. Soit $f_1 : (A_1, \delta_{A_1}) \rightarrow (B_1, \delta_{B_1})$ un *-morphisme G_1 -équivariant. Notons $f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}$ le prolongement unital et strictement continu du *-morphisme non dégénéré $A_1 \otimes S_{12} \rightarrow M(B_1 \otimes S_{12}) : x \mapsto (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(x)$. Pour tout $a \in A_1$ et $\omega \in B(H_{21})_*$, on a (4.1) :

$$(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \circ \delta_{A_1}(a) = (\text{id}_{B_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{B_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{B_1}(f_1(a)) \in M(B_2)$$

Pour tout $x \in A_2$, posons $f_2(x) = (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(x)$. Il est clair que $f_2 : A_2 \rightarrow M(B_2)$ est un *-morphisme non dégénéré. Montrons que f_2 est G_2 -équivariant. Soient $a \in A_1$ et $\omega \in B(H_{21})_*$, posons $x := (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \circ \delta_{A_1}(a)$. Nous avons en utilisant (2.27 a)) :

$$\begin{aligned} (f_2 \otimes \text{id}_{S_{22}})\delta_{A_2}(x) &= (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{22}})(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2 \otimes \omega)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{A_1}(a) \\ &= (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{22}})(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1} \otimes [(\delta_{12}^2 \otimes \text{id}_{S_{21}})\delta_{11}^2])\delta_{A_1}(a) \\ &= (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{22}})(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1} \otimes [(\text{id}_{S_{12}} \otimes \delta_{21}^2)\delta_{11}^2])\delta_{A_1}(a) \\ &= (\text{id}_{B_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(\text{id}_{B_1} \otimes [(\text{id}_{S_{12}} \otimes \delta_{21}^2)\delta_{11}^2])\delta_{B_1}(f_1(a)) \\ &= (\text{id}_{B_1 \otimes S_{12} \otimes S_{22}} \otimes \omega)(\text{id}_{B_1} \otimes [(\delta_{12}^2 \otimes \text{id}_{S_{21}})\delta_{11}^2])\delta_{B_1}(f_1(a)) = \delta_{B_2}(f_2(x)) \end{aligned}$$

□

Si on part d'une action continue $\delta_{A_2} : A_2 \rightarrow M(A_2 \otimes S_{22})$ du groupe quantique G_2 , posons :

$$\delta_{A_2}^2 := \delta_{A_2}, \delta_{A_2}^{(1)} := (\text{id} \otimes \delta_{22}^1) \circ \delta_{A_2} : A_2 \rightarrow M(A_2 \otimes S_{21} \otimes S_{12})$$

avec une preuve similaire, nous avons :

4.4 Proposition. Soit $A_1 := \text{Ind}_{\mathbf{G}_2}^{\mathbf{G}_1} A_2 := [\{(\text{id}_{A_2} \otimes \text{id}_{S_{21}} \otimes \omega) \delta_{A_2}^{(1)}(a) \mid a \in A_2, \omega \in B(H_{12})_*\}]$.

- a) A_1 est une sous- C^* algèbre de $M(A_2 \otimes S_{21})$.
- b) $[A_1(1_{A_2} \otimes S_{21})] = [(1_{A_2} \otimes S_{21})A_1] = A_2 \otimes S_{21}$. En particulier, l'inclusion $A_1 \subset M(A_2 \otimes S_{21})$ définit un $*$ -morphisme injectif et non dégénéré et on a $M(A_1) \subset M(A_2 \otimes S_{21})$.
- c) Posons $\delta_{A_1} := \text{id}_{A_2} \otimes \delta_{21}^1|_{A_1}$. Le $*$ -morphisme δ_{A_1} est à valeurs dans $M(A_1 \otimes S_{11})$ et $\delta_{A_1} : A_1 \rightarrow M(A_1 \otimes S_{11})$ est une action continue du groupe quantique G_1 .
- d) La correspondance $A^{G_2} \rightarrow A^{G_1} : (A_2, \delta_{A_2}) \mapsto (A_1, \delta_{A_1})$ est fonctorielle.

□

Dans les deux propositions suivantes, étudions la composée de correspondances :

$$A^{G_1} \rightarrow A^{G_2} \rightarrow A^{G_1} \quad \text{et} \quad A^{G_2} \rightarrow A^{G_1} \rightarrow A^{G_2}$$

4.5 Proposition. Soit $\delta_{A_1} : A_1 \rightarrow M(A_1 \otimes S_{11})$ une action continue du groupe quantique G_1 dans la C^* -algèbre A_1 . Posons $A_2 = \text{Ind}_{\mathbf{G}_1}^{\mathbf{G}_2} A_1$, $\delta_{A_2} = \text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2$ et $C = \text{Ind}_{\mathbf{G}_2}^{\mathbf{G}_1} A_2 \subset M(A_2 \otimes S_{21})$ munie de $\delta_C = \text{id}_{A_2} \otimes \delta_{21}^1$.

Avec ces notations, on a :

- a) Pour $\omega \in B(H_{12})_*, \omega' \in B(H_{21})_*$, on a :

$$(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{22}^1)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)} = \delta_{A_1}^{(2)}(\text{id}_{A_1} \otimes \omega \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)}$$

- b) $C \subset M(A_2 \otimes S_{21}) \subset M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21})$ et $C = \delta_{A_1}^{(2)}(A_1)$.

c)

$$\pi_1 : (A_1, \delta_{A_1}) \rightarrow (C, \delta_C) : a \mapsto \delta_{A_1}^{(2)}(a) = (\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{A_1}(a)$$

est un $*$ -isomorphisme G_1 -équivariant.

- d) Le $*$ -morphisme $\delta_{A_1}^{(2)} : A_1 \rightarrow M(A_2 \otimes S_{21}) : a \mapsto \delta_{A_1}^{(2)}(a)$ est injectif, non dégénéré et on a $[\delta_{A_1}^{(2)}(A_1)(1_{A_2} \otimes S_{21})] = A_2 \otimes S_{21}$.

Démonstration. Pour $\omega \in B(H_{12})_*, \omega' \in B(H_{21})_*$, on a en utilisant (2.27 a)) :

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{22}^1)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)} \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega \otimes \omega')(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{22}^1 \otimes \text{id}_{S_{21}})(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{A_1}^{(2)} \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega \otimes \omega')(\text{id}_{A_1} \otimes [(\text{id}_{S_{12}} \otimes \delta_{22}^1 \otimes \text{id}_{S_{21}})(\delta_{12}^2 \otimes \text{id}_{S_{21}})]) \delta_{A_1}^{(2)} \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega \otimes \omega')(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{21}})(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^1 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{A_1}^{(2)} \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega \otimes \omega')(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{21}})(\text{id}_{A_1} \otimes [(\delta_{12}^1 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{11}^2]) \delta_{A_1} \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega \otimes \omega')(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{21}})(\text{id}_{A_1} \otimes [(\text{id}_{S_{11}} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{11}^1]) \delta_{A_1} \\ &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega \otimes \omega')(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \delta_{11}^2)(\delta_{A_1} \otimes \text{id}_{S_{11}}) \delta_{A_1} \\ &= \delta_{A_1}^{(2)}(\text{id}_{A_1} \otimes \omega \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)} \end{aligned}$$

d'où le a).

Par définition de la C^* -algèbre C , on a :

$$C = [(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{22}^1)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)(\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)}(a) \mid a \in A_1, \omega \in B(H_{12})_*, \omega' \in B(H_{21})_*]$$

donc $C \subset M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21})$, et pour montrer le b), il suffit, en utilisant le a), d'établir :

$$A_1 = [(\text{id}_{A_1} \otimes \omega \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)}(a) \mid a \in A_1, \omega \in B(H_{12})_*, \omega' \in B(H_{21})_*]$$

Pour $a \in A_1, \omega \in B(H_{12})_*, \omega' \in B(H_{21})_*$, on a en utilisant (2.27 b)) :

$$(\text{id}_{A_1} \otimes \omega \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)}(a) = (\text{id}_{A_1} \otimes \omega \otimes \omega')((W_{12,23}^1)^* \delta_{A_1}(a)_{13} W_{12,23}^1) = (\text{id}_{A_1} \otimes W_{12}^1(\omega \otimes \omega')(W_{12}^1)^*)(\delta_{A_1}(a)_{13}).$$

Comme $W_{12}^1 : H_{12} \otimes H_{21} \rightarrow H_{12} \otimes H_{11}$ est un unitaire, on a :

$$[(\text{id}_{A_1} \otimes \omega \otimes \omega') \delta_{A_1}^{(2)}(a) \mid a \in A_1, \omega \in B(H_{12})_*, \omega' \in B(H_{21})_*] = [(\text{id}_{A_1} \otimes \omega) \delta_{A_1}(a), a \in A_1, \omega \in B(H_{11})_*] = A_1$$

Il en résulte que :

$$C = \delta_{A_1}^{(2)}([(\text{id}_{A_1} \otimes \omega \otimes \omega') \delta_{A_1}^2(A_1) \mid \omega \in B(H_{12})_*, \omega' \in B(H_{21})_*]) = \delta_{A_1}^{(2)}(A_1)$$

On a donc $\pi_1 : (A_1, \delta_{A_1}) \rightarrow (C, \delta_C) : a \mapsto \delta_{A_1}^{(2)}(a)$ un *-isomorphisme.

Pour montrer que cet isomorphisme est G_1 -équivariant, il suffit d'établir pour tout $a \in A_1$, l'égalité :

$$\delta_C(\delta_{A_1}^{(2)}(a)) = (\delta_{A_1}^{(2)} \otimes \text{id}_{S_{11}}) \delta_{A_1}(a)$$

dans $M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21} \otimes S_{11})$. On a en utilisant (2.27 a)) :

$$\begin{aligned} \delta_C(\delta_{A_1}^{(2)}(a)) &= (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \delta_{21}^1)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{A_1}(a) \\ &= (\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{11}})(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^1) \delta_{A_1}(a) \\ &= (\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2 \otimes \text{id}_{S_{11}})(\delta_{A_1} \otimes \text{id}_{S_{11}}) \delta_{A_1}(a) = (\delta_{A_1}^{(2)} \otimes \text{id}_{S_{11}}) \delta_{A_1}(a) \end{aligned}$$

Le d) se déduit du b) et (4.4 b)). □

En permutant les rôles de G_1 et G_2 , on a avec une preuve similaire, en partant d'une action continue du groupe G_2 :

4.6 Proposition. Soit $\delta_{A_2} : A_2 \rightarrow M(A_2 \otimes S_{22})$ une action continue du groupe quantique G_2 dans la C^* -algèbre A_2 . Posons $A_1 := \text{Ind}_{\mathbf{G}_2^1} A_2$, $\delta_{A_1} := \text{id}_{A_2} \otimes \delta_{21}^1$ et $D = \text{Ind}_{\mathbf{G}_1^2} A_1 \subset M(A_1 \otimes S_{12})$ munie de $\delta_D = \text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2$.

a) $D \subset M(A_1 \otimes S_{12}) \subset M(A_2 \otimes S_{21} \otimes S_{12})$ et $D = \delta_{A_2}^{(1)}(A_2)$.

b)

$$\pi_2 : (A_2, \delta_{A_2}) \rightarrow (D, \delta_D) : a \mapsto \delta_{A_2}^{(1)}(a) = (\text{id}_{A_2} \otimes \delta_{22}^1) \delta_{A_2}(a)$$

est un *-isomorphisme G_2 -équivariant.

c) Le *-morphisme $\delta_{A_2}^1 : A_2 \rightarrow M(A_1 \otimes S_{12}) : a \mapsto \delta_{A_2}^{(1)}(a)$ est injectif, non dégénéré et on a $[\delta_{A_2}^1(A_2)(1_{A_1} \otimes S_{12})] = A_1 \otimes S_{12}$.

.

□

On a donc établi :

4.7 Théorème. Les correspondances

$$(A_1, \delta_{A_1}) \rightarrow (A_2 := \text{Ind}_{\mathbf{G}_1^2} A_1, \delta_{A_2} := \text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^2)$$

$$(A_2, \delta_{A_2}) \rightarrow (A_1 := \text{Ind}_{\mathbf{G}_2^1} A_2, \delta_{A_1} := \text{id}_{A_2} \otimes \delta_{21}^1)$$

sont réciproques l'une de l'autre.

□

En utilisant le procédé d'induction développé précédemment, nous allons construire une correspondance fonctorielle $A^{G_1} \rightarrow A^G$ réciproque de la correspondance 3.21 :

$$A^G \rightarrow A^{G_1} : (A, \beta_A, \delta_A) \mapsto (A_1, \delta_{A_1})$$

Commençons par définir une correspondance $A^{G_1} \rightarrow A^G : (B_1, \delta_{B_1}) \mapsto (B, \beta_B, \delta_B)$.

Soit $\delta_{B_1} : B_1 \rightarrow M(B_1 \otimes S_{11})$ une action continue du groupe quantique G_1 .

On a associé à (B_1, δ_{B_1}) , une action continue (B_2, δ_{B_2}) du groupe quantique G_2 , avec $B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} B_1$ et $\delta_{B_2} = \text{id}_{B_1} \otimes \delta_{12}^2$, et nous avons les quatre *-morphisms :

$$\delta_{B_j}^k : B_j \rightarrow M(B_k \otimes S_{kj})$$

suivants :

- $\delta_{B_1}^1 := \delta_{B_1}$, $\delta_{B_2}^2 := \delta_{B_2}$.
- $\delta_{B_1}^2 : B_1 \rightarrow M(B_2 \otimes S_{21})$ est donné par (4.5 d)) :

$$b \mapsto \delta_{B_1}^2(b) = \delta_{B_1}^{(2)}(b) := (\text{id}_{B_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{B_1}^1(b) \in M(B_2 \otimes S_{21})$$

- $\delta_{B_2}^1 : B_2 \rightarrow M(B_1 \otimes S_{12})$ est déterminé (4.6 c)) et la relation (cf. 4.5 c)) :

$$\delta_{B_2}^{(1)} = (\pi_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}) \delta_{B_2}^1 \quad , \quad \pi_1 : B_1 \rightarrow \text{Ind}_{G_2}^{G_1} B_2 : b \mapsto \pi_1(b) := \delta_{B_1}^{(2)}(b) \quad (4.3)$$

avec $\delta_{B_2}^{(1)} := (\text{id}_{B_2} \otimes \delta_{22}^1) \circ \delta_{B_2}^2$.

4.8 Lemme. Pour tout $j, k, l = 1, 2$, on a :

- a) $(\delta_{B_k}^l \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \delta_{B_j}^k = (\text{id}_{B_l} \otimes \delta_{lj}^k) \delta_{B_j}^l$.
- b) $[\delta_{B_k}^l(B_k)(1_{B_l} \otimes S_{lk})] = B_l \otimes S_{lk}$.
- c) $B_l = [\{(\text{id}_{B_l} \otimes \omega)(\delta_{B_k}^l(B_k)) \mid \omega \in B(H_{lk})_*\}]$.

Démonstration. La preuve du a) s'appuie uniquement sur (2.27 a)) et les définitions des *-morphisms $\delta_{B_k}^l$. Plus précisément :

- Si $j = 1$, seul le cas $k = 2$ et $l = 1$ n'est pas immédiat ; on l'établit par composition avec $\delta_{B_1}^2 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{21}}$.
- Si $j = 2$. Dans le cas $k = l = 1$, on établit la formule par composition avec $\delta_{B_1}^2 \otimes \text{id}_{S_{11} \otimes S_{12}}$; si $k = 2$ et $l = 1$, on établit la formule par composition avec $\delta_{B_1}^2 \otimes \text{id}_{S_{12} \otimes S_{22}}$. Les autres cas sont immédiats.

Pour montrer le b) rappelons que $B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} B_1$. Posons $C = \text{Ind}_{G_2}^{G_1} B_2$ et $D = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} C$. On a :

- $[C(1_{B_2} \otimes S_{21})] = B_2 \otimes S_{21}$ (4.4 b)) et $C = \delta_{B_1}^2(B_1)$, donc $[\delta_{B_1}^2(B_1)(1_{B_2} \otimes S_{21})] = B_2 \otimes S_{21}$.
- $[D(1_C \otimes S_{12})] = C \otimes S_{12}$ (4.3 a)) et $D = \delta_{B_2}^{(1)}(B_2)$.

Par composition avec le *-isomorphisme $\pi_1^{-1} \otimes \text{id}_{S_{12}}$ et en remarquant qu'on a $(\pi_1^{-1} \otimes \text{id}_{S_{12}}) \delta_{B_2}^{(1)} = \delta_{B_2}^1$, on déduit l'égalité. $[\delta_{B_2}^1(B_2)(1_{B_1} \otimes S_{12})] = B_1 \otimes S_{12}$.

Les deux autres relations restantes découlent de la continuité (4.3 b)) des coactions δ_{B_1} et δ_{B_2} . Le c) est une conséquence du b). □

En appliquant 3.22, on a donc montré :

4.9 Proposition. Soit $\delta_{B_1} : B_1 \rightarrow M(B_1 \otimes S_{11})$ une action continue du groupe quantique G_1 . Posons $B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} B_1$ et $B := B_1 \oplus B_2$. Définissons les deux *-morphisms :

$$\delta_B : B \rightarrow M(B \otimes S) : b = (b_1, b_2) \mapsto \delta_B(b) := \sum_{k,j} \pi_j^k \delta_{B_j}^k(b_j) \quad , \quad \beta_B : \mathbb{C}^2 \rightarrow M(B) : (\lambda, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

où $\pi_j^k : M(B_k \otimes S_{kj}) \rightarrow M(B \otimes S)$ désigne le prolongement strictement continu de l'injection canonique $B_k \otimes S_{kj} \rightarrow B \otimes S$.

Nous avons :

- a) (β_B, δ_B) est une action continue du groupoïde \mathcal{G} .
- b) la correspondance $A^{G_1} \rightarrow A^{\mathcal{G}} : (B_1, \beta_{B_1}) \mapsto (B, \beta_B, \delta_B)$ est fonctorielle.

Démonstration. Le a) découle de 3.22, le b) de 3.20 ; notons que les isomorphismes π_1 et π_2 ((4.5 c)) et (4.6 b)) respectivement), vérifient une propriété de naturalité vis à vis des morphismes de A^{G_1} et A^{G_2} . \square

4.10 Théorème. la correspondance $A^{G_1} \rightarrow A^{\mathcal{G}}$ est la correspondance réciproque de la correspondance $A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_1} : (A, \beta_A, \delta_A) \mapsto (A_1, \delta_{A_1})$.

Il est clair que la composée de correspondances $A^{G_1} \rightarrow A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_1}$ est la correspondance identique. Pour montrer qu'il en est de même pour la composée $A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_1} \rightarrow A^{\mathcal{G}}$, nous avons besoin du résultat suivant :

4.11 Proposition. Soit (β_A, δ_A) une action continue du groupoïde \mathcal{G} dans une C^* -algèbre A . Avec les notations de 3.15 et 3.17, posons $\widetilde{A}_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1, \delta_{A_1}^1)$ et $\widetilde{A}_1 := \text{Ind}_{G_2}^{G_1}(A_2, \delta_{A_2}^2)$. Alors , on a :

- a) Pour tout $x \in A_2$, on a $\delta_{A_2}^1(x) \in \widetilde{A}_2$ et $\widetilde{\pi}_2 : (A_2, \delta_{A_2}^2) \rightarrow (\widetilde{A}_2, \delta_{\widetilde{A}_2}^1) : x \mapsto \delta_{A_2}^1(x)$ est un *-isomorphisme G_2 -équivariant.
- b) Pour tout $x \in A_1$, on a $\delta_{A_1}^2(x) \in \widetilde{A}_1$ et $\widetilde{\pi}_1 : (A_1, \delta_{A_1}^1) \rightarrow (\widetilde{A}_1, \delta_{\widetilde{A}_1}^2) : x \mapsto \delta_{A_1}^2(x)$ est un *-isomorphisme G_1 -équivariant.

Démonstration. Pour la preuve du a), on a (3.17 c)), $A_2 = [(\text{id}_{A_2} \otimes \omega) \delta_{A_1}^2(a) \mid a \in A_1, \omega \in B(H_{21})_*]$. Soit $a \in A_1$ et $\omega \in B(H_{21})_*$, on a $\delta_{A_2}^1((\text{id}_{A_2} \otimes \omega) \delta_{A_1}^2(a)) = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\delta_{A_2}^1 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{A_1}^2(a) = (\text{id}_{A_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{A_1}^1(a) \in \widetilde{A}_2$.

On en déduit que $\widetilde{\pi}_2 : A_2 \rightarrow \widetilde{A}_2 : x \mapsto \delta_{A_2}^1(x)$ est un *-isomorphisme.

Pour tout $x \in A_2$, on a $\delta_{\widetilde{A}_2}^1(\widetilde{\pi}_2(x)) = \delta_{\widetilde{A}_2}^1(\delta_{A_2}^1(x)) = (\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{12}^1)(\delta_{A_2}^1(x)) = (\delta_{A_2}^1 \otimes \text{id}_{S_{22}})(\delta_{A_2}^2(x)) = (\widetilde{\pi}_2 \otimes \text{id}_{S_{22}})(\delta_{A_2}^2(x))$, d'où l'équivariance de l'isomorphisme.

La preuve du b) est similaire. \square

Démonstration du théorème. : partons d'une action continue (β_A, δ_A) du groupoïde \mathcal{G} . Avec les notations de 3.15 et 3.17, on a $A = A_1 \oplus A_2$ avec $A_i := \beta_A(\varepsilon_i)A$ et les *-morphisms $\delta_{A_j}^k : A_j \rightarrow M(A_k \otimes S_{kj})$ vérifiant les conditions (3.17 b) et c)).

Posons $(B_1, \delta_{B_1}) := (A_1, \delta_{A_1}^1)$ et $B_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1, \delta_{A_1}^1)$, et soit (β_B, δ_B) l'action continue du groupoïde \mathcal{G} dans la C^* -algèbre $B := B_1 \oplus B_2$ associée 4.9 à (B_1, δ_{B_1}) . Reprenons le *-isomorphisme G_2 -équivariant $\widetilde{\pi}_2 : (A_2, \delta_{A_2}^2) \rightarrow (B_2, \delta_{B_2}^2)$ donné par le a) de 4.11.

Pour tout $a = a_1 + a_2 \in A$, posons $f(a) = (a_1, \widetilde{\pi}_2(a_2))$.

Il est clair que $f : A \rightarrow B$ est un *-isomorphisme vérifiant $f \circ \beta_A = \beta_B$. Notons $f_j : A_j \rightarrow B_j$ le *-isomorphisme obtenu par restriction de f à A_j .

Avec les notations de 4.8, Il est clair que la relation $(f \otimes \text{id}_S) \circ \delta_A = \delta_B \circ f$ est équivalente aux relations

$$(f_k \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \delta_{A_j}^k = \delta_{B_j}^k \circ f_j \quad , \quad j, k = 1, 2$$

Pour $j, k = 1$, il n'y a rien à démontrer. Pour $j = 1$ et $k = 2$, dans $M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21})$, on a :

$$\delta_{B_1}^2 = \delta_{A_1}^{(2)} := (\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{A_1}^1 = (\delta_{A_2}^1 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{A_1}^2 = (\tilde{\pi}_2 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{A_1}^2 = (f_2 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{A_1}^2$$

Pour $j, k = 2$, la relation $(f_k \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \delta_{A_j}^k = \delta_{B_j}^k \circ f_j$ est exactement la G_2 -équivariance de l'isomorphisme (4.11 a)) $\tilde{\pi}_2$.

Pour $j = 2$ et $k = 1$, il faut montrer que $\delta_{A_2}^1 = \delta_{B_2}^1 \circ \tilde{\pi}_2$.

En composant avec l'isomorphisme $\pi_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}$ introduit dans (4.3), il revient au même de montrer :

$$(\pi_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}) \circ \delta_{A_2}^1 = (\text{id}_{B_2} \otimes \delta_{22}^1) \circ \delta_{B_2}^2 \circ \tilde{\pi}_2$$

Dans $M(B_2 \otimes S_{21} \otimes S_{12}) \subset M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21} \otimes S_{12})$, on a par définition de π_1 :

$$(\pi_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}) \circ \delta_{A_2}^1 = [(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{A_1}^1] \otimes \text{id}_{S_{12}} \circ \delta_{A_2}^1$$

Par équivariance de $\tilde{\pi}_2$ (et aussi sa définition), on a dans $M(B_2 \otimes S_{21} \otimes S_{12}) \subset M(A_1 \otimes S_{12} \otimes S_{21} \otimes S_{12})$:

$$\begin{aligned} (\text{id}_{B_2} \otimes \delta_{22}^1) \circ \delta_{B_2}^2 \circ \tilde{\pi}_2 &= (\text{id}_{B_2} \otimes \delta_{22}^1) (\tilde{\pi}_2 \otimes \text{id}_{S_{22}}) \delta_{A_2}^2 \\ &= (\tilde{\pi}_2 \otimes \text{id}_{S_{21} \otimes S_{12}}) (\text{id}_{A_2} \otimes \delta_{22}^1) \delta_{A_2}^2 \\ &= (\tilde{\pi}_2 \otimes \text{id}_{S_{21} \otimes S_{12}}) (\delta_{A_1}^2 \otimes \text{id}_{S_{12}}) \delta_{A_2}^1 \\ &= [(\delta_{A_2}^1 \otimes \text{id}_{S_{21}}) \delta_{A_1}^2] \otimes \text{id}_{S_{12}} \circ \delta_{A_2}^1 \\ &= [(\text{id}_{A_1} \otimes \delta_{11}^2) \delta_{A_1}^1] \otimes \text{id}_{S_{12}} \circ \delta_{A_2}^1 \end{aligned}$$

□

4.2 Induction et équivalence de Morita

Nous allons montrer que les équivalences de catégories :

$$A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_1} \quad , \quad A^{G_1} \rightarrow A^{G_2} \quad , \quad A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_2}$$

échanget les équivalences de Morita.

4.12 Définition. On appelle \mathcal{G} -algèbre de liaison, une C^* -algèbre J , munie d'une action continue (β_J, δ_J) du groupoïde \mathcal{G} et de deux projecteurs non nuls $e_i \in M(J)$ vérifiant pour $i = 1, 2$, les conditions :

- a) $e_1 + e_2 = 1_J$, $[J e_i J] = J$ pour $i = 1, 2$
- b) $\delta_J(e_i) = q_{\beta_J, \alpha}(e_i \otimes 1_S)$

Reprenons les notations de (3.15) :

$$q_j = \beta_J(\varepsilon_j) \quad , \quad J_j = q_j J \quad , \quad \delta_{J_j}^k : J_j \rightarrow M(J_k \otimes S_{kj})$$

Rappelons (3.11) que β_J prend ses valeurs dans le centre de $M(J)$, donc $[q_j, e_i] = 0$.

Soit $\iota_j : M(J_j) \rightarrow M(J)$ le prolongement strictement continu de l'inclusion $J_j \subset J$ vérifiant $\iota_j(1_{J_j}) = q_j$.

Pour tout $i, j = 1, 2$, notons $e_{i,j}$, l'unique projecteur de $M(J_j)$ vérifiant $\iota_j(e_{i,j}) = e_i q_j$.

Avec ces notations nous avons facilement :

4.13 Lemme. Soient $i, j, k = 1, 2$.

- a) $e_{1,j} + e_{2,j} = 1_{J_j}$, $[J_j e_{i,j} J_j] = J_j$
- b) $\delta_{J_j}^k(e_{i,j}) = e_{i,k} \otimes 1_{S_{kj}}$

Il en résulte que la G_j - algèbre $(J_j, \delta_{J_j}^j)$, munie de $(e_{1,j}, e_{2,j})$ est une équivalence de Morita G_j -équivariante et l'image par le foncteur $A^{\mathcal{G}} \rightarrow A^{G_j} : (J, \beta_J, \delta_J) \mapsto (J_j, \delta_{J_j}^j)$ d'une équivalence de Morita est aussi une équivalence de Morita.

Réciproquement, soit $(J_1, \delta_{J_1}, e_{i,1})$ une G_1 -algèbre de liaison. Notons (J, δ_J, β_J) la \mathcal{G} - algèbre associée 4.9 par le foncteur $A^{G_1} \rightarrow A^{\mathcal{G}}$.

rappelons que $J = J_1 \oplus J_2$ avec $J_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(J_1, \delta_{J_1})$ munie de la coaction $\delta_{J_2}^2 := \text{id}_{J_1} \otimes \delta_{12}^2$. La C^* -algèbre $M(J_2)$ est identifiée à une sous- C^* -algèbre de $M(J_1 \otimes S_{12})$ et le coproduit $\delta_J : J \rightarrow M(J \otimes S)$ est donné pour tout $a = (a_1, a_2)$ par la formule :

$$\delta_J(a) = \sum_{k,j} \pi_j^k(\delta_{J_j}^k(a_j)) \quad , \quad \delta_{J_j}^k : J_j \rightarrow M(J_k \otimes S_{kj})$$

Pour $i = 1, 2$, posons $e_{i,2} := e_{i,1} \otimes 1_{S_{12}} \in \text{Proj } M(J_1 \otimes S_{12})$

Avec ces notations, nous avons :

4.14 Proposition. $(J_2, \delta_{J_2}^2, e_{i,2})$ est une G_2 -algèbre de liaison. De plus, pour tout $i, j, k = 1, 2$, nous avons :

$$\delta_{J_j}^k(e_{i,j}) = e_{i,k} \otimes 1_{S_{kj}}$$

Démonstration. Montrons que $e_{i,2} \in M(J_2)$. Soit $a \in J_1, \omega \in B(H_{21})_*$, nous avons :

$$e_{i,2}(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{J_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{J_1}(a) = (\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{J_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{J_1}(e_{i,1}a)$$

Il en résulte que $e_{i,2} \in \text{Proj}(M(J_2))$ et on a :

$$e_{1,2} + e_{2,2} = 1_{J_2} \quad , \quad \delta_{J_j}^2(e_{i,j}) = e_{i,2} \otimes 1_{S_{2j}} \quad , \quad i, j = 1, 2$$

Pour montrer l'égalité $[J_2 e_{i,2} J_2] = J_2$, il suffit de montrer 4.1 que pour tout $\omega \in B(H_{21})_*$ et pour tout $a_1, b_1 \in J_1$, on a $(\text{id}_{J_2} \otimes \omega)\delta_{J_1}^2(a_1 e_{i,1} b_1) \in [J_2 e_{i,2} J_2]$.

On a $(\text{id}_{J_2} \otimes \omega)\delta_{J_1}^2(a_1 e_{i,1} b_1) = (\text{id}_{J_2} \otimes \omega)[\delta_{J_1}^2(a_1) e_{i,2} \otimes 1_{S_{21}}]\delta_{J_1}^2(b_1)$.

Par (4.5 d)), on a $[\delta_{J_1}^2(J_1)(1_{J_2} \otimes S_{21})] = J_2 \otimes S_{21}$. Il en résulte que $(\text{id}_{J_2} \otimes \omega)\delta_{J_1}^2(a_1 e_{i,1} b_1)$ est limite de $\sum_{\text{finie}} x_i e_{i,2}(\text{id}_{J_2} \otimes \omega)\delta_{J_1}^2(b_1)$ avec $x_i \in J_2$.

Pour voir que $\delta_{J_2}^1(e_{i,2}) = e_{i,1} \otimes 1_{S_{12}}$, il suffit de composer cette égalité avec le *-isomorphisme $\pi_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}$, où π_1 est le *-isomorphisme (4.3). \square

Pour $i = 1, 2$, posons $e_i := (e_{i,1}, e_{i,2}) \in M(J)$. Les définitions des *-morphisms 4.9 (β_B, δ_B) et ce qui précède, entraînent immédiatement qu'on a :

4.15 Corollaire. $(J, \beta_J, \delta_J, e_1, e_2)$ est \mathcal{G} -algèbre de liaison.

L'image par le foncteur $A^{G_1} \rightarrow A^{\mathcal{G}}$ d'une G_1 -algèbre de liaison est aussi une \mathcal{G} -algèbre de liaison.

4.3 Induction de C^* -modules

Pour étendre le procédé d'induction aux C^* -modules équivariants [1], nous avons besoin du lemme suivant :

4.16 Lemme. Soient (B_1, δ_{B_1}) et (J_1, δ_{J_1}) deux G_1 algèbres et $f_1 : B_1 \rightarrow M(J_1)$ un *-morphisme vérifiant :

- a) Pour une unité approchée (u_λ) de B_1 , on suppose que $f_1(u_\lambda) \rightarrow e_1 \in M(J_1)$ pour la topologie stricte.
- b) $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{11}})\delta_{B_1} = \delta_{J_1} \circ f_1$.

Alors nous avons :

- (i) e_1 est un projecteur de $M(J_1)$, qui ne dépend pas de l'unité approchée (u_λ) , et on a $\delta_{J_1}(e_1) = e_1 \otimes 1_{S_{11}}$
- (ii) Pour tout $T \in M(B_1 \otimes S_{12})$, on a $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(T) = (e_1 \otimes 1_{S_{12}})(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(T)(e_1 \otimes 1_{S_{12}})$.

Remarquons que la condition b) a un sens grace à la condition a), $f_1 \otimes \text{id}_{S_{11}}$ étant le prolongement strictement continu à $M(B_1 \otimes S_{11})$ du *-morphisme $f_1 \otimes \text{id}_{S_{11}} : B_1 \otimes S_{11} \rightarrow M(J_1 \otimes S_{11})$, vérifiant $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{11}})(1_{B_1 \otimes S_{11}}) = e_1 \otimes 1_{S_{11}}$.

Démonstration. Pour voir que e_1 est un projecteur de $M(J_1)$ qui ne dépend pas de l'unité approchée, et que pour toute unité approchée (u'_λ) de B_1 , on a $f_1(u'_\lambda) \rightarrow e_1$ pour la topologie stricte dans $M(J_1)$, cf. 5.13.

On a $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{11}})\delta_{B_1}(1_{B_1}) = e_1 \otimes 1_{S_{11}}$ et $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{11}})\delta_{B_1}(u_\lambda) = \delta_{J_1}(f_1(u_\lambda)) \rightarrow \delta_{J_1}(e_1)$ pour la topologie stricte de $M(J_1 \otimes S_{11})$, donc $\delta_{J_1}(e_1) = e_1 \otimes 1_{S_{11}}$, d'où le a).

Le *-morphisme $M(B_1 \otimes S_{12}) \rightarrow M(J_1 \otimes S_{12}) : T \mapsto (e_1 \otimes 1_{S_{12}})(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(T)(e_1 \otimes 1_{S_{12}})$ est strictement continu et coïncide avec $f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}$ sur $B_1 \otimes S_{12}$, d'où le b). \square

Avec les hypothèses et les notations de 4.16, posons :

$$B_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(B_1, \delta_{B_1}) \subset M(B_1 \otimes S_{12}) \quad , \quad J_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(J_1, \delta_{J_1}) \subset M(J_1 \otimes S_{12}) \quad , \quad e_2 := e_1 \otimes 1_{S_{12}}$$

Nous avons :

4.17 Proposition. a) $e_2 \in M(J_2)$ et $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(B_2) \subset e_2 M(J_2) e_2$.

b) Posons $f_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2} f_1 : B_2 \rightarrow M(J_2) : x \mapsto (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(x)$. Alors f_2 est un *-morphisme vérifiant :

- (i) Pour toute unité approchée (v_λ) de B_2 , on a $f_2(v_\lambda) \rightarrow e_2$ pour la topologie stricte de $M(J_2)$.
- (ii) $(f_2 \otimes \text{id}_{S_{22}})\delta_{B_2} = \delta_{J_2} \circ f_2$.
- (iii) Soit $F_1 \in e_1 M(J_1) e_1$ vérifiant pour tout $b \in B_1$:

$$[F_1, f_1(b)] \in e_1 J_1 e_1 \quad , \quad f_1(b)(F_1 - F_1^*) \in e_1 J_1 e_1 \quad , \quad f_1(b)(F_1^2 - 1) \in e_1 J_1 e_1 \quad , \quad \delta_{J_1}(F_1) = F_1 \otimes 1_{S_{11}}$$

Alors $F_2 := F_1 \otimes 1_{S_{12}} \in e_2 M(J_2) e_2$ et on a tout $b \in B_2$:

$$[F_2, f_2(b)] \in e_2 J_2 e_2 \quad , \quad f_2(b)(F_2 - F_2^*) \in e_2 J_2 e_2 \quad , \quad f_2(b)(F_2^2 - 1) \in e_2 J_2 e_2 \quad , \quad \delta_{J_2}(F_2) = F_2 \otimes 1_{S_{22}}$$

Démonstration. Soit $\omega \in B(H_{21})_*$ un état normal. Pour tout $x_1 \in J_1$ et tout $\omega' \in B(H_{21})_*$, on a :

$$(e_1 \otimes 1_{S_{12}})(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega')\delta_{J_1}^{(2)}(x_1) = (\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega')\delta_{J_1}^{(2)}(e_1)_{123}\delta_{J_1}^{(2)}(x_1)_{124}$$

avec $\delta_{J_1}^{(2)} = (\text{id}_{J_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{J_1}$. Comme $e_1 \in M(J_1)$, on a (4.1) :

$$(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega')\delta_{J_1}^{(2)}(e_1)_{123}\delta_{J_1}^{(2)}(x_1)_{124} \in J_2$$

donc $e_2 := e_1 \otimes 1_{S_{12}} \in M(J_2)$.

Montrons que $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(B_2) \subset M(J_2)$. Pour tout $b_1 \in B_1$, $x_1 \in J_1$ et tout $\omega, \omega' \in B(H_{21})_*$, on a

$$[(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(\text{id}_{B_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{B_1}^{(2)}(b_1)](\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega')\delta_{J_1}^{(2)}(x_1) = (\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega')\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1))_{123}\delta_{J_1}^{(2)}(x_1)_{124}$$

avec $\delta_{B_1}^{(2)} = (\text{id}_{B_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{B_1}$. On a $f_1(b_1) \in M(J_1)$ et par (4.1), on déduit

$$(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega \otimes \omega')\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1))_{123}\delta_{J_1}^{(2)}(x_1)_{124} \in J_2$$

donc $(f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}})(B_2) \subset M(J_2)$. Tenant compte de (4.16 b)), on a prouvé le a).

Pour la preuve du i) il suffit de montrer que $e_2 J_2 = [\{f_2(b_2)x_2 \mid b_2 \in B_2, x_2 \in J_2\}]$.

L'inclusion $[\pi_2(b_2)x_2 \mid b_2 \in B_2, x_2 \in J_2] \subset e_2 J_2$ résulte du a).

Pour montrer l'égalité, montrons d'abord que $e_2 J_2 = [\{(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1)x_1) \mid b_1 \in B_1, x_1 \in J_1, \omega \in B(H_{21})_*\}]$.

On a d'abord pour tout $b_1 \in B_1, x_1 \in J_1$ et $\omega \in B(H_{21})_*$:

$$(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1)x_1) = (\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(e_1 b_1)x_1) = e_2(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1)x_1) \in e_2 J_2$$

Soit (u_λ) un unité approchée de B_1 , $x_1 \in J_1$ et $\omega \in B(H_{21})_*$. On a :

$$(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(u_\lambda)x_1) \rightarrow e_2(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(x_1) \in e_2 J_2 \quad (\text{normiquement})$$

Il reste à montrer que pour tout $b_1 \in B_1, x_1 \in J_1$ et tout $\omega \in B(H_{21})_*$, on a

$$(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1)x_1) \in [\{f_2(b_2)x_2 \mid b_2 \in B_2, x_2 \in J_2\}]$$

En effet, on sait (4.5 d) que $[\delta_{J_1}^{(2)}(J_1)(1_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes S_{21})] = J_2 \otimes S_{21}$. Posons alors $\omega = s\omega'$ avec $s \in S_{21}$. On a alors

$$(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1)x_1) = (\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega')\delta_{J_1}^{(2)}(f_1(b_1))\delta_{J_1}^{(2)}(x_1)(1_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes s) \in [f_2(B_2)J_2]$$

d'où le i). Le ii) résulte de la définition (4.3 b)) des coactions δ_{B_2} et δ_{J_2} .

Le iii) se déduit facilement des égalités $f_2(B_2) = [(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{J_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{J_1}(f_1(x)) \mid x \in B_1, \omega \in B(H_{21})_*]$ et $e_2 J_2 e_2 = [(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{J_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{J_1}(e_1 y e_1) \mid y \in J_1, \omega \in B(H_{21})_*]$ \square

Soit \mathcal{E}_1 un B_1 -module hilbertien G_1 -équivariant. On munit la G_1 -algèbre $J_1 := \mathcal{K}(\mathcal{E}_1 \oplus B_1)$ de la coaction compatible avec celle de B_1 et \mathcal{E}_1 et des deux projecteurs $e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{E}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{B_1} \end{pmatrix}$.

On rappelle que $(J_1, \delta_{J_1}, e_{l,1})$ est une équivalence de Morita G_1 -équivariante. Par définition de la coaction δ_{J_1} , le *-morphisme canonique $\iota_{B_1} : B_1 \rightarrow J_1$ vérifie les hypothèses de 4.16.

Posons $J_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(J_1, \delta_{J_1})$. D'après 4.14, on a une équivalence de Morita G_2 -équivariante $(J_2, \delta_{J_2}, e_{l,2})$ avec $e_{l,2} := e_{l,1} \otimes 1_{S_{12}} \in M(J_2)$, en particulier $e_{2,2} J_2 e_{2,2}$, munie de la restriction de la coaction δ_{J_2} , est une G_2 -algèbre.

Nous avons :

4.18 Proposition. *Posons $B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(B_1, \delta_{B_1})$. Alors $\text{Ind}_{G_1}^{G_2} \iota_{B_1} : B_2 \rightarrow e_{2,2} J_2 e_{2,2}$ est un *-isomorphisme G_2 -équivariant.*

Démonstration. Comme ι_{B_1} prend ses valeurs dans J_1 , le *-morphisme injectif $\text{Ind}_{G_1}^{G_2} \iota_{B_1}$ est à valeurs dans :

$$e_{2,2} J_2 e_{2,2} = [(\text{id}_{J_1 \otimes S_{12}} \otimes \omega)(\text{id}_{J_1} \otimes \delta_{11}^2)\delta_{J_1}(\iota_{B_1}(b)) \mid b \in B_1, \omega \in B(H_{21})_*]$$

Il en résulte que $\text{Ind}_{G_1}^{G_2} \iota_{B_1}$ est un *-isomorphisme. La G_2 -équivariance résulte facilement de (4.17 ii)). \square

Dans la suite, nous identifions les G_2 -algèbres $B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} e_{2,1} J_1 e_{2,1}$ et $J_2 = e_{2,2}(\text{Ind}_{G_1}^{G_2} J_1) e_{2,2}$

4.19 Definition. On appelle module induit du B_1 -module hilbertien G_1 -équivariant \mathcal{E}_1 , Le B_2 -module hilbertien G_2 -équivariant $\text{Ind}_{G_1}^{G_2} \mathcal{E}_1 := e_{1,2} J_2 e_{2,2} = e_{1,2}(\text{Ind}_{G_1}^{G_2} J_1) e_{2,2}$.

4.4 Induction et bidualité

Soit (A_1, δ_{A_1}) une G_1 -algèbre. Posons $(A_2, \delta_{A_2}) := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1, \delta_{A_1})$. Dans ce paragraphe, nous montrons que la G_2 -algèbre $\text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1 \rtimes G_1 \rtimes \widehat{G_1})$ est G_2 -Morita équivalente à la G_2 -algèbre $A_2 \rtimes G_2 \rtimes \widehat{G_2}$. Ce résultat est obtenu par application du théorème 3.40 au double produit croisé $A \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$, où (A, β_A, δ_A) est l'image de (A_1, δ_{A_1}) par la correspondance 4.9 $A^{G_1} \rightarrow A^{\mathcal{G}}$.

Nous examinerons ensuite le cas où $A_1 = J_1$ est une G_1 -algèbre de liaison.

Fixons une G_1 -algèbre (A_1, δ_{A_1}) . Posons $(A_2, \delta_{A_2}) := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1, \delta_{A_1})$. Rappelons que $A := A_1 \oplus A_2$ est munie de l'action (β_A, δ_A) définie dans 4.9.

Identifions alors les \mathcal{G} -algèbres $A \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ et (D, β_D, δ_D) comme dans 3.40 et reprenons intégralement les notations du paragraphe 3.3.2 et en particulier les notations 3.48.

4.20 Rappels. Par identification des bimodules hilbertiens équivariant $D_{l',j} := e_{l,j} D_j e_{l',j}$ et $\mathcal{B}_{l',j} := A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l',j}, H_{l,j})$, nous savons 3.49 que pour $j, l, l'; l \neq l'$, on a :

- a) le $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l,j}) - A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l',j})$ bimodule hilbertien G_j -équivariant $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l',j}, H_{l,j})$ est une équivalence de Morita G_j -équivariante des G_j -algèbres $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l,j})$ et $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l',j})$.
- b) La coaction de $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{jj})$ coïncide avec la coaction biduale du double produit croisé $A_j \rtimes G_j \rtimes \widehat{G_j}$, après identification [2] avec $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{jj})$.
- c) $\mathcal{E}_{l',k}^j := \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j})$, muni de la coaction

$$\delta_{l',k}^j : \xi \mapsto V_{jj,23}^k \xi_{12} (V_{jj,23}^k)^*$$

est un $\delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k(\mathcal{B}_{j,l}) - \delta_{\mathcal{B}_{j,l'}}^k(\mathcal{B}_{j,l'})$ bimodule hilbertien G_j - équivariant.

4.21 Théorème. Soit $j, k, l, l' = 1, 2, j \neq k$. Nous avons :

- a) $\mathcal{E}_{l',k}^j := \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\mathcal{B}_{l',j}) = \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{B}_{l',k}$. En particulier $\delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k(\mathcal{B}_{l,j}) = \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{B}_{l,k}$.
- b) La coaction $\delta_{l',k}^j$ du bimodule $\mathcal{E}_{l',k}^j$ coïncide avec la coaction induite par celle de $\mathcal{B}_{l',k}$.
- c) Le morphisme $\mathcal{B}_{l',j} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{B}_{l',k} : \xi \mapsto \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k(\xi)$ est un isomorphisme de bimodule G_j -équivariants au dessus des C^* -isomorphismes

$$\delta_{\mathcal{B}_{l,j}}^k : \mathcal{B}_{l,j} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{B}_{l,k} \quad , \quad \delta_{\mathcal{B}_{l',j}}^k : \mathcal{B}_{l',j} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{B}_{l',k}$$

Démonstration. Par restriction de l'isomorphisme 4.11 G_j -équivariant :

$$\tilde{\pi}_j : D_j \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_k : x \mapsto \delta_{D_j}^k(x)$$

on obtient des isomorphismes :

$$D_{l',j} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l',k}$$

de $D_{l,j} - D_{l',j}$ bimodules hilbertiens G_j -équivariants au dessus des isomorphismes G_j -équivariants

$$D_{l,j} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l,k} \quad , \quad D_{l',j} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l',k}$$

En effet, on a $\delta_{D_j}^k(e_{l,j}) = e_{l,k} \otimes 1_{S_{kj}}$ (cf. 3.45 c)). Il en résulte qu'on a :

$$\delta_{D_j}^k(D_{l',j}) = (e_{l,k} \otimes 1_{S_{kj}})(\text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_k)(e_{l',k} \otimes 1_{S_{kj}}) = \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l',k} \quad , \quad \delta_{D_j}^k(D_{l,j}) = \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l,k}$$

Par identification des G_j -algèbres D_j et $\mathcal{B}_j := A_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j})$, on déduit le a).

Il est clair que la coaction $\delta_{l',k}^j : \xi \mapsto V_{jj,23}^k \xi_{12} (V_{jj,23}^k)^*$ du $\text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{B}_{l,k}$ - module $\mathcal{E}_{l',k}^j$ est la coaction induite du $\mathcal{B}_{l',k}$ -module $\mathcal{B}_{l',k}$.

Le c) résulte de a) , b) et (3.54 b)). □

4.22 Corollaire. pour $j, k, l, l' = 1, 2$ avec $j \neq k$, nous avons :

- a) Les G_j -algèbres $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj})$ et $\text{Ind}_{G_k}^{G_j} A_k \otimes \mathcal{K}(H_{lk})$ sont canoniquement isomorphes. En particulier la G_j -algèbre $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{jj})$ est canoniquement isomorphe à la G_j -algèbre $\text{Ind}_{G_k}^{G_j} A_k \otimes \mathcal{K}(H_{jk})$.
- b) Les $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) - A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j})$ bimodules hilbertiens G_j -équivalents $A_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj})$ et $\text{Ind}_{G_k}^{G_j} A_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}, H_{lk})$ sont canoniquement isomorphes.
- c) La G_2 -algèbre $A_2 \rtimes G_2 \rtimes \widehat{G_2}$ est G_2 -Morita équivalente à la G_2 -algèbre $\text{Ind}_{G_1}^{G_2} A_1 \rtimes G_1 \rtimes \widehat{G_1}$.

Démonstration. les énoncés a) et b) découlent de l'énoncé (plus général) (4.21 c)).

En prenant $j = l = 2$ et $l' = 1$ dans (3.50 c)), on obtient une G_2 -équivalence de Morita des G_2 -algèbres $A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22})$ et $A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})$.

En prenant $j = 2, l = k = 1$ dans le a), on déduit que les G_2 -algèbres $A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})$ et $\text{Ind}_{G_1}^{G_2} A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11})$ sont canoniquement isomorphes. \square

Cas d'une algèbre de liaison

Soit $(J_1, \delta_{J_1}^1, e_1^1, e_1^2)$ une G_1 -algèbre de liaison. Posons $(J_2, \delta_{J_2}^2) = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(J_1, \delta_{J_1}^1)$. qu'on munit de sa structure de G_2 -algèbre de liaison définie 4.14) par les projecteurs :

$$e_2^1 := e_1^1 \otimes 1_{S_{12}} \quad , \quad e_2^2 := e_1^2 \otimes 1_{S_{12}}$$

Soit $J = J_1 \oplus J_2, \beta_J, \delta_J$ la \mathcal{G} -algèbre de liaison 4.15 correspondant à J_1 et J_2 , définie par les deux projecteurs de $M(J)$:

$$e^1 := (e_1^1, e_2^1) \quad , \quad e^2 := (e_1^2, e_2^2)$$

Pour expliciter la structure de \mathcal{G} -algèbre de liaison du double produit croisé $J \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ correspondant aux projecteurs e^1, e^2 , nous reprenons les notations du paragraphe 3.3.2, en remplaçant dans toutes ces notations A par J .

Comme dans 3.40, on identifie $J \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ à la C^* -algèbre $D \subset \mathcal{L}(J \otimes H)$.

4.23 Lemme. Pour $i = 1, 2$, il existe un unique projecteur $e_D^i \in M(D)$ vérifiant

$$j_D(e_D^i) = q_{\beta_J, \widehat{\alpha}}(e^i \otimes 1_H) \in \mathcal{L}(J \otimes H) \quad , \quad \widehat{\alpha} = \beta$$

On a $e_D^1 + e_D^2 = 1_D$; $[De_D^i D] = D$, $i = 1, 2$; $\delta_D(e_D^i) = \delta_D(1_D)(e_D^i \otimes 1_S)$.

Démonstration. Rappelons qu'on a :

$$D = [\{(\text{id}_J \otimes R)\delta_J(a)(1_J \otimes \lambda(x)L(s)) \mid a \in J, x \in \widehat{S}, s \in S\}] = D_1 \oplus D_2 \subset \mathcal{L}(J \otimes H)$$

il est clair que $q_{\beta_J, \widehat{\alpha}}(e^i \otimes 1_H) \in j_D(M(D))$ où :

$$j_D(M(D)) = \{T \in \mathcal{L}(A \otimes H) \mid TD \subset D, DT \subset D, Tj_D(1_D) = j_D(1_D)T = T\} ; j_D(1_D) = q_{\beta_J, \widehat{\alpha}}$$

On en déduit l'existence des projecteurs e_D^i . Les assertions restantes du lemme se déduisent de la structure de \mathcal{G} -algèbre de liaison de $(J, \beta_J, \delta_J, e^1, e^2)$. \square

Il apparait clairement que la \mathcal{G} -algèbre D a en fait deux structures d'algèbre de liaison compatibles : celle définie par les projecteurs e_D^i et celle qui correspond aux projecteurs 3.45 $e_{l,j}$ de D_1 et D_2 :

4.24 Lemme. Pour tout $s, j, l = 1, 2$, notons $e_{l,j}^s \in M(D_j)$, l'unique projecteur vérifiant :

$$\iota_j(e_{l,j}^s) = e_D^s \iota_j(e_{l,j}) \quad , \quad \iota_j : M(D_j) \rightarrow M(D) , \iota_j(1_{D_j}) = \beta_D(\varepsilon_j)$$

Pour $s, j, k, l = 1, 2$, on a $\delta_{D_j}^k(e_{l,j}^s) = e_{l,k}^s \otimes 1_{S_{kj}}$
(Pour la définition des projecteurs $e_{l,j}$, cf. 3.45)

Démonstration. La définition 4.23 des projecteurs e_D^s entraîne clairement qu'on a :

$$[e_D^s, \iota_j(e_{l,j})] = 0 \quad , \quad e_D^s \iota_j(e_{l,j}) \beta_D(\varepsilon_j) = e_D^s \iota_j(e_{l,j})$$

d'où l'existence et l'unicité des projecteurs $e_{l,j}^s$.

Notons $\pi_j^k : M(D_k \otimes S_{kj}) \rightarrow M(D \otimes S)$ le *-morphisme canonique correspondant à l'inclusion $D_k \otimes S_{kj} \subset D \otimes S$. L'égalité à établir est équivalente à :

$$(j_D \otimes \text{id}_S) \pi_j^k \delta_{D_j}^k (e_{l,j}^s) = (j_D \otimes \text{id}_S) \pi_j^k (e_{l,k}^s \otimes 1_{S_{kj}})$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} (j_D \otimes \text{id}_S) \pi_j^k \delta_{D_j}^k (e_{l,j}^s) &= (j_D \otimes \text{id}) (\delta_D(\iota_j(e_{l,j}^s)) (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})) = \\ &= (j_D \otimes \text{id}_S) (\delta_D(e_D^s \iota_j(e_{l,j})) (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})) \\ &= (j_D \otimes \text{id}) (\delta_D(1_D) (e_D^s \otimes 1_S) \delta_D(\iota_j(e_{l,j})) (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} &= (j_D \otimes \text{id}) (\delta_D(1_D) (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) (e_D^s \otimes 1_S) \delta_D(\iota_j(e_{l,j})) (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})) \\ &= (j_D \otimes \text{id}) ((\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) (e_D^s \otimes 1_S) \pi_j^k (\delta_{D_j}^k (e_{l,j}^s))) \\ &= q_{\beta_J, \hat{\alpha}, 12} (1_J \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) (e^s \otimes 1_H \otimes 1_S) (q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} (j_D \otimes \text{id}_S) \pi_j^k (e_{l,k}^s \otimes 1_{S_{kj}}) &= (j_D \otimes \text{id}_S) ((\iota_k(e_{l,k}^s) \otimes 1_S) (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})) \\ &= (j_D \otimes \text{id}_S) ((e_D^s \iota_k(e_{l,k}) \otimes 1_S) (\beta_D(\varepsilon_k) \otimes p_{kj})) \\ &= q_{\beta_J, \hat{\alpha}, 12} (e^s \otimes 1_H \otimes 1_S) (q_k \otimes p_{lk} \otimes 1_S) q_{\beta_J, \hat{\alpha}, 12} (1_J \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) \quad (3.45a) \\ &= q_{\beta_J, \hat{\alpha}, 12} (1_J \otimes \beta(\varepsilon_k) \otimes p_{kj}) (e^s \otimes 1_H \otimes 1_S) (q_k \otimes p_{lk} \otimes p_{kj}) \end{aligned}$$

□

4.25 Notations. Pour $j, l, l', s, s' = 1, 2$, posons

$$D_{ll',j}^{ss'} := e_{l,j}^s D_j e_{l',j}^{s'} \quad , \quad D_{l,j}^s := D_{ll,j}^{ss}$$

On déduit de 4.24 que par restriction de la structure de G_j -algèbre de D_j , on obtient que $D_{ll',j}^{ss'}$ est un $D_{l,j}^s - D_{l',j}^{s'}$ bimodule hilbertien G_j -équivariant.

4.26 Proposition. Soit $j, k = 1, 2, j \neq k$. Par restriction des isomorphismes 4.11 G_j -équivariants :

$$\tilde{\pi}_j : D_j \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_k : x \mapsto \delta_{D_j}^k(x)$$

on obtient des isomorphismes :

$$D_{ll',j}^{ss'} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{ll',k}^{ss'}$$

de $D_{l,j}^s - D_{l',j}^{s'}$ bimodules hilbertiens G_j -équivariants au dessus des isomorphismes G_j -équivariants

$$D_{l,j}^s \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l,k}^s \quad , \quad D_{l',j}^{s'} \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l',k}^{s'}$$

Démonstration. Il résulte 4.24 des égalités $\delta_{D_j}^k(e_{l,j}^s) = e_{l,k}^s \otimes 1_{S_{kj}}$, qu'on a :

$$\delta_{D_j}^k(e_{l,j}^s D_j e_{l',j}^{s'}) = (e_{l,k}^s \otimes 1_{S_{kj}}) (\text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_k) (e_{l',k}^{s'} \otimes 1_{S_{kj}}) = \text{Ind}_{G_k}^{G_j} e_{l,k}^s D_k e_{l',k}^{s'} \quad , \quad \delta_{D_j}^k(D_{l,j}^s) = \text{Ind}_{G_k}^{G_j} D_{l,k}^s$$

□

Nous allons appliquer 4.26 à l'algèbre de liason correspondant à un module hilbertien équivariant, cf. 1.3.3. Soient (A_1, δ_{A_1}) et (B_1, δ_{B_1}) deux G_1 -algèbres et $(\mathcal{E}_1, \delta_{\mathcal{E}_1})$ un $A_1 - B_1$ bimodule hilbertien G_1 -équivariant Posons :

$$A_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1, \delta_{A_1}) \quad , \quad B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(B_1, \delta_{B_1}) \quad , \quad \mathcal{E}_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(\mathcal{E}_1, \delta_{\mathcal{E}_1})$$

Prenons pour J_1 , la G_1 -algèbre $J_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(\mathcal{E}_1) & \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_1^* & B_1 \end{pmatrix}$, qu'on munit de la coaction δ_{J_1} qui définit la structure de B_1 -module G_1 -équivariant de \mathcal{E}_1 , cf. 1.3.3.

On a alors $J_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2} J_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(\mathcal{E}_2) & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2^* & B_2 \end{pmatrix}$ est une G_2 -algèbre de liason.

Considérons alors la \mathcal{G} -algèbre de liason $J := J_1 \oplus J_2$ définie par J_1 et J_2 , (cf. 4.15). Identifions les \mathcal{G} -algèbres $J \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ et (D, β_D, δ_D) comme dans 3.40 et reprenons intégralement les notations du paragraphe 3.3.2 et en particulier les notations 3.48.

Pour $j = 1, 2$ et par l'identification $D_j = J_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j})$, observons que pour $l, l' = 1, 2$, on a :

1) En prenant $s = 1$, la G_j -algèbre $D_{l,j}^1$ s'identifie à la G_j -algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{E}_j) \otimes \mathcal{K}(H_{lj})$, dont la coaction est donnée par la formule :

$$x \mapsto V_{jj,23}^l (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_j)} \otimes \sigma) (\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_j)}^j \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{lj})}) (x) (V_{jj,23}^l)^* \quad , \quad x \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_j) \otimes \mathcal{K}(H_{lj})$$

2) En prenant $s = 2$, la G_j -algèbre $D_{l,j}^2$ s'identifie à la G_j -algèbre $B_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj})$, dont la coaction est donnée par la formule :

$$x \mapsto V_{jj,23}^l (\text{id}_{B_j} \otimes \sigma) (\delta_{B_j}^j \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{lj})}) (x) (V_{jj,23}^l)^* \quad , \quad x \in B_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj})$$

3) En prenant $s = 1$ et $s' = 2$, le $D_{l,j}^1 - D_{l',j}^2$ bimodule hilbertien G_j -équivariant $D_{ll',j}^{12}$ s'identifie au $\mathcal{K}(\mathcal{E}_j) \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) - B_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j})$ bimodule hilbertien G_j -équivariant $\mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj})$, dont la coaction est donnée par la formule :

$$\xi \mapsto V_{jj,23}^l (\text{id}_{\mathcal{E}_j} \otimes \sigma) (\delta_{\mathcal{E}_j}^j \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj})}) (\xi) (V_{jj,23}^{l'})^* \quad , \quad \xi \in \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj})$$

(Tous les σ sont des flips évidents).

Nous avons :

4.27 Théorème. Soit \mathcal{E}_1 un $A_1 - B_1$ bimodule hilbertien G_1 -équivariant dont l'action à gauche $A_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$ est supposée non dégénérée. Posons

$$A_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} A_1 \quad , \quad B_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} B_1 \quad , \quad \mathcal{E}_2 = \text{Ind}_{G_1}^{G_2} \mathcal{E}_1$$

Pour $j, k, l, l' = 1, 2$ avec $j \neq k$, le morphisme

$$\delta_{ll',j}^k : \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{E}_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}, H_{lk}) : \xi \mapsto V_{kj,23}^l (\text{id}_{\mathcal{E}_k} \otimes \sigma) (\delta_{\mathcal{E}_k}^k \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj})}) (\xi) (V_{kj,23}^{l'})^*$$

est un isomorphisme de G_j -modules hilbertiens au dessus des C^* -isomorphismes :

$$A_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} A_k \otimes \mathcal{K}(H_{lk}) : x \mapsto V_{kj,23}^l (\text{id}_{A_k} \otimes \sigma) (\delta_{A_k}^k \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{lj})}) (x) (V_{kj,23}^l)^*$$

$$B_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}) \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} B_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}) : x \mapsto V_{kj,23}^{l'} (\text{id}_{B_k} \otimes \sigma) (\delta_{B_k}^k \otimes \text{id}_{\mathcal{K}(H_{l'j})}) (x) (V_{kj,23}^{l'})^*$$

Démonstration. Il résulte de 4.26 que les assertions qu'on obtient, en remplaçant dans celles du théorème, la G_j -algèbre A_j par la G_j -algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{E}_j)$, sont établies.

L'équivariance de l'action à gauche $A_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$ (cf. 1.3.3), définit une action 4.3 non dégénérée G_2 -équivariante $A_2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$. Il en résulte qu'on a un $*$ -morphisme \mathcal{G} -équivariant $A = A_1 \oplus A_2 \rightarrow M(J)$.

Comme dans le cas d'une action continue d'un groupe quantique l.c dans une C^* -algèbre, on déduit un $*$ -morphisme \mathcal{G} -équivariant $A \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow M(J \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}})$.

Pour $j = 1, 2$, posons $\mathcal{A}_j = A_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j})$. En identifiant 3.3.2 les \mathcal{G} -algèbres $A \rtimes \mathcal{G} \rtimes \widehat{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, on obtient pour tout $j = 1, 2$, un $*$ -morphisme

$$f_j : \mathcal{A}_j \rightarrow M(\mathcal{B}_j) \quad , \quad \mathcal{B}_j = J_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j}) \quad (4.4)$$

et pour tout j, k , on a

$$(f_k \otimes \text{id}_{S_{kj}}) \circ \delta_{\mathcal{A}_j}^k = \delta_{\mathcal{B}_j}^k \circ f_j \quad (4.5)$$

Par restriction de f_j , on obtient pour $l, l' = 1, 2$, un $*$ -morphisme non dégénéré et G_j -équivariant :

$$A_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}))$$

L'équivariance de l'isomorphisme $\delta_{\mathcal{U}',j}^k : \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{E}_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}, H_{lk})$ résulte alors de 4.26 et de (4.5). \square

Pour définir une équivalence des catégories KK^{G_1} et KK^{G_2} , nous avons besoin d'expliciter quelques notations supplémentaires et d'établir un lemme utile.

4.28 Notations.

a) Pour tout $j, k, l, l' = 1, 2$ avec $j \neq k$, on a :

$$\mathcal{B}_{l,j} := J_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(\mathcal{E}_j) \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) & \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) \\ \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj})^* & B_j \otimes \mathcal{K}(H_{lj}) \end{pmatrix}$$

b) Le $\mathcal{B}_{l,j} - \mathcal{B}_{l',j}$ bimodule hilbertien $\mathcal{B}_{ll',j}$ est de la forme :

$$\mathcal{B}_{ll',j} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(\mathcal{E}_j) \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) & \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) \\ \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj})^* & B_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) \end{pmatrix}$$

c) Par restriction de $\delta_{\mathcal{B}_j}^k$, on a les isomorphismes G_j -équivariants (4.11, 3.48) :

$$\delta_{\mathcal{U}',j}^k : \mathcal{K}(\mathcal{E}_j) \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{K}(\mathcal{E}_k) \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}, H_{lk}) : x \mapsto V_{kj,23}^l (\text{id} \otimes \sigma) (\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_j)}^k \otimes \text{id})(x) (V_{kj,23}^{1'})^*$$

$$\delta_{\mathcal{U}',j}^k : \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} \mathcal{E}_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}, H_{lk}) : \xi \mapsto V_{kj,23}^l (\text{id} \otimes \sigma) (\delta_{\mathcal{E}_j}^k \otimes \text{id})(\xi) (V_{kj,23}^{1'})^*$$

$$\delta_{\mathcal{U}',j}^k : B_j \otimes \mathcal{K}(H_{l'j}, H_{lj}) \rightarrow \text{Ind}_{G_k}^{G_j} B_k \otimes \mathcal{K}(H_{l'k}, H_{lk}) : x \mapsto V_{kj,23}^l (\text{id} \otimes \sigma) (\delta_{B_j}^k \otimes \text{id})(x) (V_{kj,23}^{1'})^*$$

4.29 Lemme. Pour tout $j, k, l = 1, 2$ et tout $T \in M(\mathcal{K}(\mathcal{E}_l))$, nous avons :

$$\delta_{\mathcal{U}',j}^k (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_j)} \otimes R_{jl}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_l)}^j (T) = (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_k)} \otimes R_{kl}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_l)}^k (T) \otimes 1_{S_{kj}}$$

Démonstration. C'est un cas particulier de (3.37 b)) appliquée à l'action du groupoïde \mathcal{G} dans la C^* -algèbre J . \square

4.5 Application à la KK -théorie équivariante

Soient G_1 et G_2 deux groupes quantiques l.c. monoidalement équivalents et réguliers. Fixons (A_1, δ_{A_1}) et (B_1, δ_{B_1}) deux G_1 -algèbres et posons :

$$(A_2, \delta_{A_2}) = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1, \delta_{A_1}) \quad , \quad (B_2, \delta_{B_2}) = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(B_1, \delta_{B_1})$$

A tout $A_1 - B_1$ bimodule de Kasparov (\mathcal{E}_1, F_1) nous associons un $A_2 - B_2$ bimodule de Kasparov (\mathcal{E}_2, F_2) , ce qui nous permet de définir un isomorphisme de groupes abéliens :

$$J_{G_2, G_1} : KK^{G_1}(A_1, B_1) \rightarrow KK^{G_2}(A_2, B_2) : x = [(\mathcal{E}_1, F_1)] \mapsto J_{G_2, G_1}(x) := [(\mathcal{E}_2, F_2)]$$

dont l'isomorphisme réciproque $J_{G_1, G_2} : KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_1}(A_1, B_1)$ est obtenu de la même manière en permutant les rôles de G_1 et G_2 .

Rappels sur la KK -théorie bivalente équivariante de Kasparov et notations

1) Soit G un groupe quantique l.c régulier. A tout couple de G -algèbres A et B , on associe [1] un groupe abélien noté $KK^G(A, B)$, dont les générateurs sont les classes de $A - B$ bimodules de Kasparov (\mathcal{E}, F) où \mathcal{E} est un $A - B$ bimodule hilbertien G -équivariant et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ vérifie :

$$[F, x] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) \quad , \quad x(F - F^*) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) \quad , \quad x(F^2 - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) \quad , \quad x \in A$$

$$x(\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E})}(F) - F \otimes 1_S) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) \otimes S \quad , \quad x \in A \otimes S$$

où on a posé $S = C_0(G)$.

2) Si A, D, B sont des G -algèbres, on a un produit (produit interne de Kasparov) :

$$KK^G(A, D) \rtimes KK^G(D, B) \rightarrow KK^G(A, B) : (x, y) \mapsto x \otimes_D y$$

3) Soit A une G -algèbre, identifions [2] les G -algèbres $A \rtimes G \rtimes \widehat{G}$ et $A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$. On note β_A (resp. α_A), la classe du bimodule de Kasparov $(A \otimes L^2(G), 0)$, (resp. $((A \otimes L^2(G))^*, 0)$).

On a $\beta_A \in KK^G(A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)), A)$ et $\alpha_A \in KK^G(A, A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)))$.

4) Soient A et B deux G -algèbres, on rappelle [1] que pour tout $x = [(\mathcal{E}, F)] \in KK^G(A, B)$, on a

$$\beta_A \otimes_A x \otimes_B \alpha_B = [(\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}(L^2(G)), (\text{id} \otimes R)\delta_{\mathcal{E}}(F))] \in KK^G(A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)), B \otimes \mathcal{K}(L^2(G)))$$

et que l'application $KK^G(A, B) \rightarrow KK^G(A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)), B \otimes \mathcal{K}(L^2(G))) : x \mapsto \beta_A \otimes_A x \otimes_B \alpha_B$ est un isomorphisme de groupes abéliens, (cf. [1]).

5) Pour tout $x = [(\mathcal{E}, F)] \in KK^G(A, B)$, quitte à remplacer x par $1_A \otimes_A x$, on peut supposer que l'action à gauche $A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est non dégénérée.

Notons [1] que l'opérateur $(\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E})} \otimes R)\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E})}(F)$ est fixe pour la coaction biduale de $\mathcal{K}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$.

Fixons un groupoïde de co-liaison $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{G_1, G_2}$ et deux G_1 -algèbres (A_1, δ_{A_1}) et (B_1, δ_{B_1}) .

Pour tout $A_1 - B_1$ bimodule de Kasparov (\mathcal{E}_1, F_1) , où on suppose que l'action à gauche $A_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$ est non dégénérée, posons 4.27 :

$$(A_2, \delta_{A_2}) = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(A_1, \delta_{A_1}) \quad , \quad (B_2, \delta_{B_2}) = \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(B_1, \delta_{B_1}) \quad , \quad (\mathcal{E}_2, \delta_{\mathcal{E}_2}) := \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(\mathcal{E}_1, \delta_{\mathcal{E}_1})$$

Avec les notations de 4.27, nous avons :

4.30 Proposition. $(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1))$ est un $A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}) - B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})$ bimodule de Kasparov G_2 -équivariant..

Démonstration. L'opérateur $(\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}(F_1)$ étant fixe pour la coaction biduale de $\mathcal{K}(\mathcal{E}_1) \otimes \mathcal{K}(H_{11})$, posons $F' = (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}(F_1) \otimes 1_{S_{12}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}(\mathcal{E}_1) \otimes \mathcal{K}(H_{11}) \otimes S_{12})$. Il est clair que le $A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}) - B_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11})$ bimodule de Kasparov $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}(F_1))$ satisfait les conditions de 4.17 b) iii). On en déduit que : $(\text{Ind}_{G_1}^{G_2} \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), F')$ est un $\text{Ind}_{G_1}^{G_2} A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}) - \text{Ind}_{G_1}^{G_2} B_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11})$ bimodule de Kasparov G_2 -équivariant. En utilisant 4.27 et 4.29, on obtient que $(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1))$ est l'antécédent de $(\text{Ind}_{G_1}^{G_2} \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), F')$ par le G_2 -isomorphisme $\delta_{11,2}^1$. \square

4.31 Notations. Pour $j, l, l' = 1, 2$, notons $\gamma_{w,j,g}$ (resp $\gamma_{w,j,d}$), l'équivalence de Morita G_j -équivariante 3.51 $\gamma_{w,j}$ relative à la \mathcal{G} -algèbre $A = A_1 \oplus A_2$ (resp. $B = B_1 \oplus B_2$). Nous notons aussi $\gamma_{w,j,g}$ (resp $\gamma_{w,j,d}$), l'élément du groupe de Kasparov correspondant à cette équivalence de Morita.

4.32 Proposition. Conservons les hypothèses et les notations de 4.30.

Il existe un opérateur $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$ vérifiant :

- a) (\mathcal{E}_2, F_2) est un $A_2 - B_2$ bimodule de Kasparov G_2 -équivariant.
- b) $\beta_{A_2} \otimes_{A_2} [(\mathcal{E}_2, F_2)] \otimes_{B_2} \alpha_{B_2} = \gamma_{21,2,g} \otimes_{A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})} [(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1))] \otimes_{B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})} \gamma_{12,2,d}$

De plus, si $F_2, F'_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$ vérifient les conditions a) et b) précédentes, alors on a :

$$[(\mathcal{E}_2, F_2)] = [(\mathcal{E}_2, F'_2)] \in KK^{G_2}(A_2, B_2)$$

Démonstration. Nous avons :

$$\gamma_{21,2,g} = [(A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22}), 0)] \quad , \quad \gamma_{12,2,d} = [(B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}, H_{12}), 0)]$$

Il est facile de vérifier qu'on a :

$$A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22}) \otimes_{A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})} \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}) = \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22})$$

$$\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22}) \otimes_{B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})} B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}, H_{12}) = \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22})$$

Soit $(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}), G_2)$ un $A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}) - B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22})$ bimodule de Kasparov G_2 -équivariant vérifiant :

$$\gamma_{21,2,g} \otimes [(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1))] \otimes \gamma_{12,2,d} = [(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}), G_2)]$$

L'isomorphisme [1] de groupes abéliens :

$$KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_2}(A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}), B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22})) : x \mapsto \beta_{A_2} \otimes_{A_2} x \otimes_{B_2} \alpha_{B_2}$$

permet d'obtenir un opérateur $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$ vérifiant a) et b). L'unicité de l'élément du groupe de Kasparov $[(\mathcal{E}_2, F_2)]$ correspondant est claire. \square

4.33 Corollaire. Pour tout $x = [(\mathcal{E}_1, F_1)] \in KK^{G_1}(A_1, B_1)$, notons $J_{G_2, G_1}(x) \in KK^{G_2}(A_2, B_2)$, l'unique élément du groupe $KK^{G_2}(A_2, B_2)$, vérifiant :

$$\beta_{A_2} \otimes_{A_2} J_{G_2, G_1}(x) \otimes_{B_2} \alpha_{B_2} = \gamma_{21,2,g} \otimes_{A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})} [(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1))] \otimes_{B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12})} \gamma_{12,2,d}$$

Alors $J_{G_2, G_1} : KK^{G_1}(A_1, B_1) \rightarrow KK^{G_2}(A_2, B_2)$ est un morphisme de groupe abélien.

Démonstration. Pour tout $A_1 - B_1$ bimodule de Kasparov (\mathcal{E}_1, F_1) , avec une action à gauche non dégénérée, il est clair que $[(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1))] \in KK^{G_2}(A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}))$ ne dépend que de la classe de (\mathcal{E}_1, F_1) dans $KK^{G_1}(A_1, B_1)$.

L'induction de G_1 à G_2 étant compatible avec les sommes directes, J_{G_2, G_1} est un morphisme de groupes abéliens. \square

Montrons maintenant qu'on a aussi un morphisme de groupes abéliens :

$$J_{G_1, G_2} : KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_1}(A_1, B_1)$$

Pour tout $A_2 - B_2$ bimodule de Kasparov G_2 -équivalent (\mathcal{E}_2, F_2) , posons :

$$\tilde{A}_1 := \text{Ind}_{G_2}^{G_1} A_2, \quad \tilde{B}_1 := \text{Ind}_{G_2}^{G_1} B_2, \quad J_2 := \mathcal{K}(\mathcal{E}_2 \oplus B_2), \quad \tilde{J}_1 := \text{Ind}_{G_2}^{G_1} J_2 = \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \tilde{B}_1)$$

Définissons d'abord un morphisme de groupes abéliens

$$\tilde{J}_{G_1, G_2} : KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_1}(\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), \tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}))$$

Notons que l'action de G_1 dans $\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})$ (resp. $\tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})$), s'obtient par restriction de l'action de \mathcal{G} dans le double produit croisé $(\tilde{A}_1 \oplus A_2) \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}}$ (resp. $(\tilde{B}_1 \oplus B_2) \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}}$), qui permet aussi d'obtenir un G_1 -isomorphisme de $\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})$ sur $\text{Ind}_{G_2}^{G_1}(A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}))$ (resp. $\tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})$ sur $\text{Ind}_{G_2}^{G_1}(B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}))$). (cf. 4.9 où il faut permuter les rôles de G_1 et G_2 et aussi 4.22).

En permutant les rôles de G_1 et G_2 et en utilisant une version de 4.27 et 4.29, pour la \mathcal{G} -algèbre de liaison $\tilde{J} := \tilde{J}_1 \oplus J_2$, on établit :

4.34 Proposition. *Pour tout $A_2 - B_2$ bimodule de Kasparov G_2 -équivalent (\mathcal{E}_2, F_2) , où on suppose que l'action à gauche $A_2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$ est non dégénérée, $(\tilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_1)} \otimes R_{12})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2))$ est un $\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}) - \tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})$ bimodule de Kasparov G_1 -équivalent.*

Conservons les notations précédentes. Introduisons les \mathcal{G} -algèbres :

$$A := A_1 \oplus A_2, \quad \tilde{A} := \tilde{A}_1 \oplus A_2 \quad ; \quad B := B_1 \oplus B_2, \quad \tilde{B} := \tilde{B}_1 \oplus B_2$$

On déduit de (4.5, c)), qu'on a des isomorphismes \mathcal{G} -équivalents :

$$f : A \rightarrow \tilde{A} : (a_1, a_2) \mapsto (\delta_{A_1}^{(2)}(a_1), a_2) \quad , \quad g : B \rightarrow \tilde{B} : (b_1, b_2) \mapsto (\delta_{B_1}^{(2)}(b_1), b_2)$$

Notons que f (resp. g) opère par l'identité sur A_2 (resp. B_2).

On déduit alors des isomorphismes \mathcal{G} -équivalents :

$$f : A \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{A} \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}} \quad , \quad g : B \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{B} \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}} \quad (4.6)$$

et en utilisant (3.44 a)), on obtient pour tout $l = 1, 2$ des isomorphismes G_1 -équivalents :

$$f_{l,1} : A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{l1}) \rightarrow \tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{l1}) \quad , \quad g_{l,1} : B_1 \otimes \mathcal{K}(H_{l1}) \rightarrow \tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{l1})$$

Comme dans 4.33 et en utilisant 4.34, nous avons :

4.35 Proposition. *Pour tout $y = [(\mathcal{E}_2, F_2)] \in KK^{G_2}(A_2, B_2)$, notons $J_{G_1, G_2}(y) \in KK^{G_1}(A_1, B_1)$, l'unique élément du groupe $KK^{G_1}(A_1, B_1)$, vérifiant :*

$$\beta_{A_1} \otimes_{A_1} J_{G_1, G_2}(y) \otimes_{B_1} \alpha_{B_1} = \gamma_{12,1,g} \otimes f_{2,1} \otimes [(\tilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_1)} \otimes R_{12})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2))] \otimes g_{2,1}^{-1} \otimes \gamma_{21,1,d}$$

Alors $J_{G_1, G_2} : KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_1}(A_1, B_1)$ est un morphisme de groupe abélien.

Démonstration. Il est clair que $\tilde{J}_{G_1, G_2} : KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_1}(\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), \tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})) :$

$$y = [(\mathcal{E}_2, F_2)] \mapsto [(\tilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_1)} \otimes R_{12})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2))]$$

est un morphisme de groupes et on a

$$\beta_{A_1} \otimes_{A_1} J_{G_1, G_2}(y) \otimes_{B_1} \alpha_{B_1} = \gamma_{12,1,g} \otimes f_{2,1} \otimes \tilde{J}_{G_1, G_2}(y) \otimes g_{2,1}^{-1} \otimes \gamma_{21,1,d}, \quad y \in KK^{G_2}(A_2, B_2)$$

□

Finalement, nous avons :

4.36 Théorème. $J_{G_2, G_1} : KK^{G_1}(A_1, B_1) \rightarrow KK^{G_2}(A_2, B_2)$ est un isomorphisme de groupe abéliens et on a $J_{G_1, G_2} = (J_{G_2, G_1})^{-1}$

Démonstration. Montrons que $J_{G_1, G_2} \circ J_{G_2, G_1} = \text{id}_{KK^{G_1}(A_1, B_1)}$.

Soit (\mathcal{E}_1, F_1) un $A_1 - B_1$ bimodule de Kasparov G_1 -équivalent (avec l'action à gauche non dégénérée).

Posons $x_1 := [(\mathcal{E}_1, F_1)]$, $y_2 := J_{G_2, G_1}(x_1)$ et $x'_1 := J_{G_1, G_2}(y_2)$

On sait 4.32 qu'il existe $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$, où $\mathcal{E}_2 := \text{Ind}_{G_1}^{G_2} \mathcal{E}_1$, tel que $y_2 = [(\mathcal{E}_2, F_2)]$.

On a avec les notations de 4.35 :

$$\beta_{A_1} \otimes_{A_1} x'_1 \otimes_{B_1} \alpha_{B_1} = \gamma_{12,1,g} \otimes f_{2,1} \otimes [(\tilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_1)} \otimes R_{12})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2))] \otimes g_{2,1}^{-1} \otimes \gamma_{21,1,d}$$

Pour expliciter $J_{G_1, G_2}(y_2)$, introduisons les notations :

$$J_1 := \mathcal{K}(\mathcal{E}_1 \oplus B_1), \quad J_2 := \mathcal{K}(\mathcal{E}_2 \oplus B_2), \quad \tilde{J}_1 := \text{Ind}_{G_2}^{G_1} J_2 = \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \tilde{B}_1)$$

Nous avons alors deux \mathcal{G} -algèbres $J := J_1 \oplus J_2$ et $\tilde{J} := \tilde{J}_1 \oplus J_2$ avec un \mathcal{G} -isomorphisme 4.5 :

$$h : J \rightarrow \tilde{J} : (x_1, x_2) \mapsto (\delta_{J_1}^{(2)}(x_1), x_2)$$

qui opère par l'identité sur J_2 . En appliquant 3.44 au \mathcal{G} -isomorphisme

$$h : J \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{J} \rtimes \mathcal{G} \rtimes \hat{\mathcal{G}}$$

qui est compatible avec les \mathcal{G} -isomorphismes (4.6) f et g , on obtient :

$$\begin{aligned} & \gamma_{12,1,g} \otimes f_{2,1} \otimes [(\tilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_1)} \otimes R_{12})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2))] \otimes g_{2,1}^{-1} \otimes \gamma_{21,1,d} \\ &= \gamma_{12,1,g} \otimes [\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{12})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2)] \otimes \gamma_{21,1,d} \end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'un opérateur $F'_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$ tel que $x'_1 = [(\mathcal{E}_1, F'_1)]$.

Pour montrer que $x_1 = x'_1$, il suffit d'établir dans $KK^{G_1}(A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), B_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11})) :$

$$[(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F_1))] = [(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1))]$$

On a :

$$\beta_{A_2} \otimes_{A_2} y_2 \otimes_{B_2} \alpha_{B_2} = \gamma_{21,2,g} \otimes x_2 \otimes \gamma_{12,2,d}, \quad x_2 := [(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1))] \quad (4.7)$$

$$\beta_{A_1} \otimes_{A_1} x'_1 \otimes_{B_1} \alpha_{B_1} = \gamma_{12,1,g} \otimes y_1 \otimes \gamma_{21,1,d}, \quad y_1 := [(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{12})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2))] \quad (4.8)$$

Les deux égalités (4.7) et (4.8) sont équivalentes à :

$$[(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{22})\delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^2(F_2))] \otimes \gamma_{21,2,d} = \gamma_{21,2,g} \otimes x_2 \quad (4.9)$$

$$y_1 \otimes \gamma_{21,1,d} = \gamma_{21,1,g} \otimes (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1) \quad (4.10)$$

Pour (4.9), on a :

$$[(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{22}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^2(F_2))] \otimes \gamma_{21,2,d} = [(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{22}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^2(F_2))] \quad (4.11)$$

De même, pour (4.10), on a :

$$y_1 \otimes \gamma_{21,1,d} = [(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{12}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2))] \quad (4.12)$$

Pour $j = 1, 2$, reprenons (4.4) et (4.5) :

$$f_j : \mathcal{A}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_j) \quad , \quad \mathcal{A}_j := A_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j}) ; \quad \mathcal{B}_j := J_j \otimes \mathcal{K}(H_{1j} \oplus H_{2j})$$

le *-morphisme défini par l'action à gauche de A_j dans \mathcal{E}_j .

Il résulte de (4.9) et (4.11) que $(\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{22}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^2(F_2)$ est une $(\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)} \otimes R_{21}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1)$ connexion dans le produit de Kasparov $\gamma_{21,2,g} \otimes x_2$, i.e pour tout $a \in A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22})$, on a :

$$(\text{id} \otimes R_{22}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}(F_2) f_2(a) - f_2(a) (\text{id} \otimes R_{21}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22})) \quad (4.13)$$

Posons $d = (\text{id} \otimes R_{22}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}(F_2) f_2(a) - f_2(a) (\text{id} \otimes R_{21}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^2(F_1)$. Nous avons :

- $d \in M(\mathcal{B}_2)$ et définit clairement un élément $d' \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22}))$.
- (4.13) signifie que $d \in \mathcal{B}_2$ et plus exactement $d' \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}), \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22}))$.

Posons $c = \delta_{\mathcal{B}_2}^1(d) \in M(\mathcal{B}_1 \otimes S_{12})$. En utilisant (4.28 c)), 4.29, on obtient :

$$c = ((\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{12}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2) \otimes 1_{S_{12}}) (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}) \delta_{\mathcal{A}_2}^1(a) - (f_1 \otimes \text{id}_{S_{12}}) \delta_{\mathcal{A}_2}^1(a) ((\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F_1) \otimes 1_{S_{12}})$$

On déduit de (3.17 c)) que pour tout $a \in A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22})$ et tout $\omega \in B(H_{12})_*$, on a :

$$(\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{12}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2) f_1(\text{id}_{\mathcal{A}_1} \otimes \omega) \delta_{\mathcal{A}_2}^1(a) - f_1(\text{id}_{\mathcal{A}_1} \otimes \omega) \delta_{\mathcal{A}_2}^1(a) (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F_1) \in \mathcal{B}_1$$

Mais, il découle de (3.17 c)) et (4.26), qu'on a

$$A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21}) = [\{(\text{id}_{\mathcal{A}_1} \otimes \omega) \delta_{\mathcal{A}_2}^1(a) \mid a \in A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{12}, H_{22}), \omega \in B(H_{12})_*\}]$$

Finalement, nous avons obtenu que pour tout $b \in A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21})$, on a

$$(\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{12}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2) f_1(b) - f_1(b) (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21})) \quad (4.14)$$

De même, dans (4.10) et (4.12), on interprète $(\text{id} \otimes R_{12}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2)$ comme une $(\text{id} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1)$ connexion dans le produit de Kasparov $\gamma_{21,1,g} \otimes (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1)$, i.e pour tout $b \in A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21})$, on a :

$$(\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{12}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_2)}^1(F_2) f_1(b) - f_1(b) (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21})) \quad (4.15)$$

Par la différence (4.14) - (4.15), on obtient que pour $b \in A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21})$:

$$f_1(b) (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1) - f_1(b) (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}, H_{21}))$$

Comme $H_{21} \neq 0$, on déduit facilement que pour tout $b \in A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11})$, on a :

$$f_1(b) (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1) - f_1(b) (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}))$$

ce qui entraîne dans $KK^{G_1}(A_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), B_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}))$:

$$[(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F_1))] = [(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{11}), (\text{id}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)} \otimes R_{11}) \delta_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)}^1(F'_1))]$$

On a donc établi $J_{G_1, G_2} \circ J_{G_2, G_1} = \text{id}_{KK^{G_1}(A_1, B_1)}$, ce qui montre que J_{G_1, G_2} est surjective et que J_{G_2, G_1} est injective.

Pour voir directement que J_{G_1, G_2} est injective, on remarque d'abord que 4.35 définit un morphisme de groupes abéliens : $\tilde{J}_{G_1, G_2} : KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_1}(\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), \tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}))$.

En le composant avec le morphisme (injectif)

$$J'_{G_1, G_2} : KK^{G_1}(\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}), \tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})) \rightarrow KK^{G_2}(\text{Ind}_{G_1}^{G_2}(\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})), \text{Ind}_{G_1}^{G_2}(\tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21})))$$

et en identifiant $\text{Ind}_{G_1}^{G_2}(\tilde{A}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}))$ et $\text{Ind}_{G_1}^{G_2}(\tilde{B}_1 \otimes \mathcal{K}(H_{21}))$ avec $A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22})$ et $B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22})$ respectivement, on voit que la composée $J'_{G_1, G_2} \circ \tilde{J}_{G_1, G_2}$ est l'isomorphisme

$$KK^{G_2}(A_2, B_2) \rightarrow KK^{G_2}(A_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}), B_2 \otimes \mathcal{K}(H_{22}))$$

de [1]. □

5 Appendice

5.1 Produit tensoriels relatifs d'espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, on se fixe une algèbre de von Neumann N , munie d'un poids nsff ν . On note $(H_\nu, \pi_\nu, \Lambda_\nu)$ la représentation GNS poids ν , et on désigne par J_ν, Δ_ν et (σ_t^ν) respectivement l'opérateur de Tomita, l'opérateur modulaire et le groupe d'automorphismes modulaires, canoniquement associés au poids ν .

5.1 Notations. a) On note N^o l'algèbre de von Neumann opposée de N qu'on munit du poids ν^o défini par $\nu^o(x^o) = \nu(x)$ pour $x \in N^+$. On rappelle que la représentation GNS du poids ν^o est $(H_\nu, \pi_{\nu^o}, \Lambda_{\nu^o})$ où :

$$\pi_{\nu^o}(x^o) = J_\nu \pi_\nu(x)^* J_\nu, \quad x \in N \quad ; \quad \Lambda_{\nu^o} x^o := J_\nu \Lambda_\nu x^*, \quad x \in \mathfrak{N}_\nu^*$$

b) $C_N : N^o \rightarrow \pi_\nu(N)'$: $x^o \mapsto J_\nu \pi_\nu(x)^* J_\nu$ est un *-isomorphisme d'algèbres de von Neumann. Il en résulte que H_ν est un bimodule sur N pour les actions définies par :

$$x\xi y := \pi_\nu(x) J_\nu \pi_\nu(y)^* J_\nu \xi \quad ; \quad x, y \in N \quad ; \quad \xi \in H_\nu$$

Dans ce qui suit, on se fixe H, K des espaces de Hilbert, $\alpha : N \rightarrow B(H)$ et $\beta : N^o \rightarrow B(K)$ des représentations normales et uniales. Le *-morphisme α , (resp. β) munit H (resp. K) d'une structure de N -module à gauche (resp. à droite).

Pour tout $\xi \in H$ (resp. $\xi \in K$), notons R_ξ^α (resp. L_ξ^β), l'opérateur défini par :

$$R_\xi^\alpha : \Lambda_\nu \mathfrak{N}_\nu \rightarrow H : \Lambda_\nu x \mapsto \alpha(x)\xi \quad , \quad (\text{resp. } L_\xi^\beta : \Lambda_{\nu^o} \mathfrak{N}_{\nu^o} \rightarrow K : \Lambda_{\nu^o} x^o \mapsto \beta(x^o)\xi)$$

5.2 Definition. [12, 7] Le vecteur $\xi \in H$ (resp. $\xi \in K$), est dit borné à droite (resp. à gauche), si et seulement si l'opérateur R_ξ^α (resp. L_ξ^β) se prolonge en un opérateur borné $R_\xi^\alpha : H_\nu \rightarrow H$, (resp. $L_\xi^\beta : H_\nu \rightarrow K$).

On note ${}_\nu(\alpha, H)$, (resp. $(K, \beta)_\nu$) l'espace vectoriel formé par les vecteurs bornés à droite (resp. à gauche).

• Il est facile de voir que pour tout $\xi \in {}_\nu(\alpha, H)$ (resp. $\xi \in (K, \beta)_\nu$), l'opérateur R_ξ^α (resp. L_ξ^β) est N -linéaire à gauche (resp. à droite). Il en résulte que pour tout $\xi, \eta \in {}_\nu(\alpha, H)$ (resp. $\xi, \eta \in (K, \beta)_\nu$), on a :

$$(R_\xi^\alpha)^* R_\eta^\alpha \in \pi_\nu(N)' \quad , \quad R_\xi^\alpha (R_\eta^\alpha)^* \in \alpha(N)'; \quad (\text{resp. } (L_\xi^\beta)^* L_\eta^\beta \in \pi_\nu(N) \quad , \quad L_\xi^\beta (L_\eta^\beta)^* \in \beta(N^o)')$$

5.3 Notations. Pour tout $\xi, \eta \in {}_\nu(\alpha, H)$ (resp. $\xi, \eta \in (K, \beta)_\nu$), posons :

$$\langle \xi, \eta \rangle_{N^\circ} := C_N^{-1}((R_\xi^\alpha)^* R_\eta^\alpha) \in N^\circ \quad , \quad (\text{resp. } \langle \xi, \eta \rangle_N := \pi_\nu^{-1}((L_\xi^\beta)^* L_\eta^\beta) \in N)$$

5.4 Proposition. [12] Pour tout $\xi, \eta \in {}_\nu(\alpha, H)$ (resp. $\xi, \eta \in (K, \beta)_\nu$), et tout $y \in N$ analytique pour (σ_t^ν) , nous avons :

- a) $\langle \xi, \eta \rangle_{N^\circ}^* = \langle \eta, \xi \rangle_{N^\circ} \quad , \quad (\text{resp. } \langle \xi, \eta \rangle_N^* = \langle \eta, \xi \rangle_N).$
- b) $\langle \xi, \eta y^\circ \rangle_{N^\circ} = \langle \xi, \eta \rangle_{N^\circ} (\sigma_{\frac{i}{2}}^\nu(y))^\circ \quad , \quad (\text{resp. } \langle \xi, \eta y \rangle_N = \langle \xi, \eta \rangle_N \sigma_{-\frac{i}{2}}^\nu(y))$

5.5 Corollaire. Supposons que N est de dimension finie et que ν est une trace. Alors $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ est un pré- C^* -module hilbertien sur N

La définition du produit tensoriel relatif [12, 6] d'espaces de Hilbert $K_\beta \otimes_\alpha H$ résulte du résultat suivant :

5.6 Lemme. [12, 6] Pour tout $\xi_1, \xi_2 \in {}_\nu(\alpha, H)$ et tout $\eta_1, \eta_2 \in (K, \beta)_\nu$, on a

$$\langle \eta_1, \beta(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{N^\circ}) \eta_2 \rangle_K = \langle \xi_1, \alpha(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_N) \xi_2 \rangle_H$$

Définition Le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert $K_\beta \otimes_\alpha H$ est le séparé - complété de l'espace préhilbertien $(K, \beta)_\nu \odot {}_\nu(\alpha, H)$ pour :

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle := \langle \eta_1, \beta(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{N^\circ}) \eta_2 \rangle_K = \langle \xi_1, \alpha(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_N) \xi_2 \rangle_H$$

5.7 Remarques. a) En remplaçant (N, ν) par (N°, ν°) , on obtient la définition du produit tensoriel relatif $H_\alpha \otimes_\beta K$.

- b) L'espace de Hilbert $K_\beta \otimes_\alpha H$ est aussi le séparé - complété de l'espace préhilbertien $K \odot {}_\nu(\alpha, H)$ pour :

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \alpha(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_N) \xi_2 \rangle_H$$

De plus, pour tout $\xi \in K, \eta \in {}_\nu(\alpha, H)$ et $y \in N$ analytique pour (σ_t^ν) , on a :

$$\beta(y^\circ) \xi_\beta \otimes_\alpha \eta = \xi_\beta \otimes_\alpha \alpha(\sigma_{-\frac{i}{2}}^\nu(y)) \eta$$

5.8 Proposition. Supposons que N est de dimension finie et que ν est une trace. Soit \mathcal{E} le C^* -module sur N complété de $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$, alors $K_\beta \otimes_\alpha H$ est le produit interne de Kasparov $\mathcal{E} \otimes_\alpha H$

5.2 Produit fibré d'algèbres de von Neumann

Conservons les mêmes notations. Soient $x \in \beta(N^\circ)'$ et $y \in \alpha(N)'$. Il est facile de voir que l'opérateur :

$$(K, \beta)_\nu \odot {}_\nu(\alpha, H) \rightarrow K_\beta \otimes_\alpha H : \xi \otimes \eta \mapsto x(\xi) \otimes y(\eta)$$

se prolonge en un opérateur borné, noté $x_\beta \otimes_\alpha y \in B(K_\beta \otimes_\alpha H)$.

Soit $A \subset B(H)$ (resp. $B \subset B(K)$), une algèbre de von Neumann. Supposons que la représentation $\alpha : N \rightarrow B(H)$ (resp. $\beta : N^\circ \rightarrow B(K)$) soit à valeurs dans A (resp. B).

5.9 Définition. [12] Le produit fibré $B_\beta *_\alpha A$ des algèbres de von Neumann A et B , est le commutant dans $B(K_\beta \otimes_\alpha H)$ de l'ensemble $\{x_\beta \otimes_\alpha y ; x \in B', y \in A'\}$.

Cas où N est de dimension finie

Supposons que $N = \bigoplus_{l=1}^k M_{n_l}$ est de dimension finie et $\nu = \bigoplus_{l=1}^k \text{Trace}(F_l \cdot)$. Pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, notons $(F_{l,i})$ les valeurs propres de la matrice $F_l \in M_{n_l}$.

Nous avons :

5.10 Proposition. ([6]). Supposons pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, on a $\sum_{i=1}^{n_l} F_{l,i}^{-1} = 1$.

Soit $v : K \otimes H \rightarrow K_\beta \otimes_\alpha H : \xi \otimes \eta \mapsto \xi_\beta \otimes_\alpha \eta$. Nous avons :

a) v est une co-isométrie.

Posons $p = v^*v \in \text{Proj}(B(K \otimes H))$ et soient $A \subset \alpha(N)'$ et $B \subset \beta(N^o)'$ des algèbres de von Neumann.

b) L'application $B_\beta *_\alpha A \rightarrow p(B \otimes A)p : x \mapsto v^*xv$ est un *-isomorphisme d'algèbres de von Neumann.

Démonstration abrégée. Pour la preuve du a), on établit que pour tout $\xi, \eta \in K$, on a :

$$\langle \xi, \eta \rangle_N = \sum_{l=1}^k \sum_{i,j=1}^{n_l} F_{l,i}^{-\frac{1}{2}} F_{l,j}^{-\frac{1}{2}} \langle \xi, \beta(e_{ji}^{l,o}) \rangle_K e_{ij}^l$$

où (e_{ij}^l) est un s.u.m qui diagonalise la matrice F_l , i.e $F_l = \sum_{i=1}^{n_l} F_{l,i} e_{ii}^l$.

Pour la preuve du b), on applique le théorème du commutant d'un produit tensoriel d'algèbres de von Neumann. \square

Conservons $N = \oplus_{l=1}^k M_{n_l}$ et prenons pour ν , la trace de Markov non normalisée $\varepsilon := \oplus_{l=1}^k n_l \text{Trace}_{M_{n_l}}$. Dans ce cas le N -module à droite K muni du produit scalaire \langle, \rangle_N , est un C^* -module sur N et $K_\beta \otimes_\alpha H$ est le produit de Kasparov $K \otimes_N H$. De plus, pour tout s.u.m $(e_{ij}^l)_{1 \leq l \leq k}$, on a :

$$p = \sum_{l=1}^k \frac{1}{n_l} \sum_{i,j=1}^{n_l} \beta(e_{ji}^{l,o}) \otimes \alpha(e_{ij}^l)$$

La représentation GNS $(H_\varepsilon, \pi_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon)$ de la trace ε est donnée par :

$$H_\varepsilon := \oplus_l \mathbf{C}^{n_l} \otimes \overline{\mathbf{C}^{n_l}} \quad , \quad \pi_\varepsilon(x) = \oplus_l x_l \otimes \overline{1_{\mathbf{C}^{n_l}}} \quad , \quad \Lambda_\varepsilon x = \pi_\varepsilon(x) \xi_\varepsilon \quad , \quad x = \oplus_l (x_l) \in N$$

avec $\xi_\varepsilon = \oplus_l \sqrt{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} \varepsilon_i^l \otimes \overline{\varepsilon_i^l}$ et (ε_i^l) une base orthonormée pour chaque espace de Hilbert \mathbf{C}^{n_l} .

Remarquons que si (e_{ij}^l) est le s.u.m défini par la base orthonormée (ε_i^l) de l'espace de Hilbert \mathbf{C}^{n_l} , alors $(\frac{1}{\sqrt{n_l}} \pi_\varepsilon(e_{ij}^l) \xi_\varepsilon)_{1 \leq i,j \leq n_l; l=1, \dots, k}$ est une base orthonormée pour H_ε .

Nous avons :

5.11 Proposition. Soient $\alpha : N \rightarrow B(H)$, $\beta : N^{op} \rightarrow B(K)$ des représentations uniales.

a) Pour tout $\xi, \eta \in H$, nous avons $q_{\alpha,\beta}(R_\xi^\alpha (R_\eta^\alpha)^* \otimes 1_K) = q_{\alpha,\beta}(\theta_{\xi,\eta} \otimes 1_K) q_{\alpha,\beta}$.

b) Pour tout $\xi, \eta \in K$, nous avons $q_{\alpha,\beta}(1_H \otimes L_\xi^\beta (L_\eta^\beta)^*) = q_{\alpha,\beta}(1_H \otimes \theta_{\xi,\eta}) q_{\alpha,\beta}$.

Démonstration. Montrons le a). Pour $\zeta, \zeta' \in H$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \zeta \otimes 1, q_{\alpha,\beta}(R_\xi^\alpha (R_\eta^\alpha)^* \otimes 1_H)(\zeta' \otimes 1) \rangle &= \sum_{l=1}^k \frac{1}{n_l} \sum_{i,j=1}^{n_l} \langle (R_\xi^\alpha)^* \zeta, (R_\eta^\alpha)^* \alpha(e_{ji}^l) \zeta' \rangle \beta(e_{ij}^{l,o}) \\ &= \sum_{l,l'=1}^k \frac{1}{n_l n_{l'}} \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{u,v=1}^{n_{l'}} \langle ((R_\xi^\alpha)^* \zeta, e_{uv}^{l'} \xi_\varepsilon) \langle e_{uv}^{l'} \xi_\varepsilon, ((R_\eta^\alpha)^* \alpha(e_{ji}^l) \zeta') \rangle \beta(e_{ij}^{l,o}) \\ &= \sum_{l,l'=1}^k \frac{1}{n_l n_{l'}} \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{u,v=1}^{n_{l'}} \langle \zeta, \alpha(e_{uv}^{l'} \xi) \rangle \langle \alpha(e_{uv}^{l'} \eta), \alpha(e_{ji}^l) \zeta' \rangle \beta(e_{ij}^{l,o}) \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{1}{n_l^2} \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{v=1}^{n_l} \langle \zeta, \alpha(e_{jv}^l \xi) \rangle \langle \alpha(e_{iv}^l \eta), \zeta' \rangle \beta(e_{ij}^{l,o}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \zeta \otimes 1, q_{\alpha,\beta}(\theta_{\xi,\eta} \otimes 1) q_{\alpha,\beta}(\zeta' \otimes 1) \rangle &= \sum_{l,l'=1}^k \frac{1}{n_l n_{l'}} \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{u,v=1}^{n_{l'}} \langle \zeta, \alpha(e_{uv}^{l'}) \xi \rangle \langle \alpha(e_{ji}^l) \eta, \zeta' \rangle \beta(e_{vu}^{l',o}) \beta(e_{ji}^{l,o}) \\
&= \sum_{l=1}^k \frac{1}{n_l^2} \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{u=1}^{n_l} \langle \zeta, \alpha(e_{ui}^l) \xi \rangle \langle \alpha(e_{ji}^l) \eta, \zeta' \rangle \beta(e_{ju}^{l,o}) \\
&= \sum_{l=1}^k \frac{1}{n_l^2} \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{v=1}^{n_l} \langle \zeta, \alpha(e_{jv}^l) \xi \rangle \langle \alpha(e_{iv}^l) \eta, \zeta' \rangle \beta(e_{ij}^{l,o})
\end{aligned}$$

La preuve du b) s'obtient de façon similaire. \square

On démontre de la même façon le résultat suivant :

5.12 Proposition. Soient $\alpha : N \rightarrow B(H)$, $\beta : N^{op} \rightarrow B(K)$ des représentations unitales.

a) Pour tout $\xi, \eta \in K$, nous avons $q_{\beta,\alpha}(L_{\xi}^{\beta}(L_{\eta}^{\beta})^* \otimes 1_H) = q_{\beta,\alpha}(\theta_{\xi,\eta} \otimes 1_H) q_{\beta,\alpha}$

b) Pour tout $\xi, \eta \in H$, nous avons $q_{\beta,\alpha}(1_K \otimes R_{\xi}^{\alpha}(R_{\eta}^{\alpha})^*) = q_{\beta,\alpha}(1_K \otimes \theta_{\xi,\eta}) q_{\beta,\alpha}$

\square

5.13 Proposition. Soient A et B deux C^* -algèbres et $f : A \rightarrow M(B)$ un $*$ -morphisme. Supposons que pour une unité approchée (u_{λ}) de A , on a $f(u_{\lambda}) \rightarrow e \in M(B)$ pour la topologie stricte. Alors nous avons :

- a) $e \in \text{Proj}(M(B))$ et pour toute unité approchée (v_{λ}) de A , on a $f(v_{\lambda}) \rightarrow e \in M(B)$ pour la topologie stricte.
- b) Le $*$ -morphisme f se prolonge de façon unique en un $*$ -morphisme $f : M(A) \rightarrow M(B)$ strictement continu et vérifiant $f(1_A) = e$.

Démonstration. Il est facile de voir que e est un projecteur et que f définit un $*$ -morphisme non dégénéré $f : A \rightarrow \mathcal{L}(eB)$. \square

5.14 Notation. Soient A et B deux C^* -algèbres , $f : A \rightarrow M(B)$ un $*$ -morphisme et $e \in \text{Proj}(M(B))$. La notation

$$f(1_A) = e$$

signifie que pour une unité approchée (u_{λ}) de A , on a $f(u_{\lambda}) \rightarrow e \in M(B)$ pour la topologie stricte. On note alors $f : M(A) \rightarrow M(B)$ le prolongement strictement continu de f vérifiant $f(1_A) = e$.

Références

- [1] S. BAAJ et G. SKANDALIS, C^* -algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante, *K-theory* **2** (1989), 425-488.
- [2] S. BAAJ et G. SKANDALIS, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^* -algèbres, *Ann. Scient. École Norm.* 4^e série, tome 26, n°4 (1993), 425-488.
- [3] S. BAAJ, G. SKANDALIS and S. VAES, Non-semi-regular quantum groups coming from number theory, *Comm. Math. Phys.* **235** (4) (1993), 425-488.
- [4] J. BICHON, A. DE RIJDT and S. VAES, Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups, *Comm. Math. Phys.* **262** (2006), 703-728.
- [5] A. CONNES, *Non commutative geometry*, Academic Press, Inc. San Diego, CA (1994).
- [6] K. DE COMMER, Monoidal equivalence of locally compact quantum groups, preprint : arXiv :math.OA/0804240v2

- [7] K. DE COMMERS, Galois coactions for algebraic and locally compact quantum groups, *Ph.D. thesis, Leuven, Katholieke Universiteit Leuven* (2009). Available online : <http://homepages.vub.ac.be/~kdecomme/>
- [8] K. DE COMMERS, On a Morita equivalence between the duals of quantum $SU(2)$ and quantum $E(2)$, *Adv. Math.* (2) (2012), 1047-1079.
- [9] K. DE COMMERS, A. FRESLON and M. YAMASHITA, CCAP for universal discrete quantum groups (with , with an appendix by S. Vaes), *Comm. Math. Phys.* **331** (2) (2014), 677-701.
- [10] A. DE RIJDT and N. VANDER VENNET, Actions of monoidally equivalent compact quantum groups and applications to probabilistic boundaries, *Ann. Inst. Fourier* **60** n°1 (2010), 169-216.
- [11] M. ENOCK, Quantum groupoids of compact type, *J. Inst. Math. Jussieu* **4** (2005), 29-133.
- [12] M. ENOCK, Measured Quantum Groupoids in action, *Mémoires de la S.M.F.* **114** (2008), 1-150.
- [13] . IZUMI, Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions, *Adv. Math.* **169** (2002), 1-57.
- [14] G.KASPAROV, Hilbert C^* -modules : theorems of Stinespring and Voiculescu. *J. Operator Theory.* **4** (1980), no. 1, 133-150.
- [15] G.KASPAROV, Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture, *Invent.Math.* **91** (1988) no. 1, 147-201.
- [16] J. KUSTERMANS and S. VAES, Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting, *Math. Scand.* **92** (1) (2003), 68-82.
- [17] F. LESIEUR, Measured quantum groupoids, *Mémoire de la SMF* **109** (2007), 1-117.
- [18] S. NESHVEYEV and L. TUSET, Deformation of C^* -algebras by cocycles on locally compact quantum groups, *Adv. Math.* **254** (2014), 454-496.
- [19] T. TIMMERMAN, Pseudo-multiplicative unitaries and pseudo-Kac systems on C^* -modules 05/2005, Dissertation, Preprint des SFB 478 Münster (394)
- [20] T. TIMMERMAN, Coactions of Hopf C^* -bimodules, *J. Operator Theory.* **68** (2012), no. 1, 19-66.
- [21] S. VAES, The unitary implementation of a locally compact quantum group action, *J. Funct. Anal.* **180** (2001), 426-480.
- [22] S. VAES and N. VANDER VENNET, Identification of the Poisson and Martin boundaries of orthogonal discrete quantum groups, *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), 391-412.
- [23] S. VAES and R.VERGNIOUX, The boundary of universal discrete quantum groups, exactness and factoring, *Duke Math. J.* **140** (2007), 35-84.
- [24] J-M.VALLIN, Unitaire pseudo-multiplicatif associé à un groupoïde. Applications à la moyennabilité. *J. Operator Theory.* **44** (2000), no. 2, 347-368.
- [25] R.VERGNIOUX and C. VOIGT, The K-theory of free quantum groups. *Math. Ann.* **357** (2013),no. 1, 355-400.
- [26] C. VOIGT, The Baum-Connes conjecture for free orthogonal quantum groups, *Adv. Math.*, **227** (5) (2011), 1873-1913.